

Rešitve 1. kolokvija iz Analize 1

- (1) **P** Obstaja taka podmnožica $A \subset \mathbb{R}$ množice realnih števil \mathbb{R} , da je $A \neq \mathbb{R}$, množica $\mathbb{R} \setminus A$ števna, množici A in \mathbb{R} pa imata enako moč.
- P** Če je $f : A \rightarrow B$ bijektivna preslikava, imata množici A in B enako moč.
- N** Obstajata taki kompleksni števili $z, w \in \mathbb{C}$, da je $|z| = 2$, $|w| = 3$ in $|z - 2w| = 9$.
- P** Zaporedje $a_n = 1 + \frac{1}{n} \cos n^2$ je Cauchyjevo.
- N** Vsaka podmnožica realnih števil ima natančno zgornjo mejo.
- P** Če je x racionalno število in y iracionalno število, obstaja med njima tako racionalno število z , da je $x \neq z$.
- N** Če ima zaporedje a_n eno samo realno stekališče s , velja $s = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- P** Navzgor neomejeno zaporedje a_n premore tako podzaporedje a_{n_k} , da je $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \infty$.
- N** Enačba $z^n = z_0$, kjer je n naravno število, ima n različnih kompleksnih rešitev za vsako kompleksno število z_0 .
- P** Vsako padajoče zaporedje pozitivnih realnih števil je konvergentno.

(2) Poišči vsa realna števila x , ki zadoščajo neenačbi

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} < \sqrt{4x-2}.$$

Rešitev: Če hočemo, da bo neenačba sploh definirana, morajo biti izrazi pod vsemi tremi koreni nenegativni. To se bo zgodilo, če bo $x \in [1, \infty)$.

Ker sta obe strani pozitivni, lahko neenačbo kvadriramo, da dobimo:

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} &< \sqrt{4x-2}, \\ x-1 + 2\sqrt{(x-1)(2x-1)} + 2x-1 &< 4x-2, \\ 2\sqrt{(x-1)(2x-1)} &< x.\end{aligned}$$

Na levi strani imamo sedaj pozitivno število. Ker je neenačba definirana samo za $x \geq 1$, lahko privzamemo, da je tudi x pozitiven in neenačbo še enkrat kvadriramo:

$$\begin{aligned}2\sqrt{(x-1)(2x-1)} &< x, \\ 4(x-1)(2x-1) &< x^2, \\ 7x^2 - 12x + 4 &< 0.\end{aligned}$$

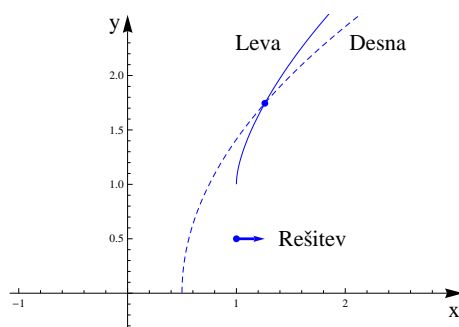
Kvadratna funkcija na levi ima ničli

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{7},$$

zato je rešitev kvadratne neenačbe interval $(\frac{6-2\sqrt{2}}{7}, \frac{6+2\sqrt{2}}{7})$, rešitev neenačbe iz naloge pa

$$R = [1, \infty) \cap [\frac{6-2\sqrt{2}}{7}, \frac{6+2\sqrt{2}}{7}] = [1, \frac{6+2\sqrt{2}}{7}).$$

Poglejmo še skico.



□

- [2] Definijsko območje.
- [10] Prevedba neenačbe na kvadratno neenačbo.
- [4] Rešitev kvadratne neenačbe.
- [4] Rešitev neenačbe.

(3) Poišči vsa kompleksna števila z , ki rešijo enačbo

$$|z|^6 = \bar{z}^3 + 15z^3 - 64.$$

Rešitev: Opazimo lahko, da v enačbi nastopajo potence števila z^3 , zato bomo poskusili s substitucijo $w = z^3$. Tako pridemo do enačbe

$$|w|^2 = \bar{w} + 15w - 64.$$

To enačbo bomo rešili v kartezičnih koordinatah. Če pišemo $z = x + iy$, velja:

$$\begin{aligned} |w|^2 &= \bar{w} + 15w - 64, \\ x^2 + y^2 &= x - iy + 15(x + iy) - 64, \\ x^2 + y^2 &= 16x + 14iy - 64. \end{aligned}$$

Če primerjamo realni in imaginarni komponenti obeh strani, pridemo do sistema enačb:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16x - 64, \\ 0 &= 14iy. \end{aligned}$$

Iz druge enačbe dobimo $y = 0$. Ko to vstavimo v prvo enačbo, pridemo do enačbe $x^2 - 16x + 64 = 0$, ki ima edino rešitev $x = 8$. Torej je $w = 8$. Rešitve prvotne enačbe so posledično rešitve enačbe

$$z^3 = 8.$$

Pišimo $z = |z|e^{i\phi}$. Sledi

$$|z|^3 e^{i3\phi} = 8 \cdot e^{i2k\pi}.$$

Vidimo, da je $|z| = 2$ in $\phi = \frac{2k\pi}{3}$ za $k \in \{0, 1, 2\}$. Rešitve enačbe so torej

$$z_k = 2e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

oziroma eksplicitno:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2, \\ z_1 &= -1 + \sqrt{3}i, \\ z_2 &= -1 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

□

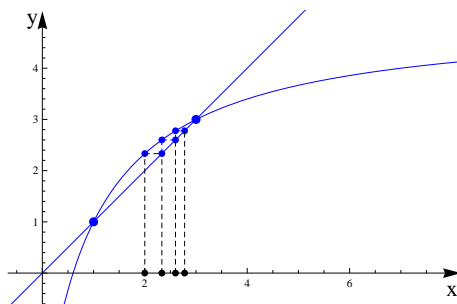
- [4] Uvedba spremenljivke $w = z^3$.
- [8] Izračun $w = 8$.
- [2] Reševanje enačbe $z^3 = 8$ v polarni obliki.
- [6] Po dve točki za vsako rešitev.

(4) Zaporedje (a_n) je podano z začetnim členom $a_1 = 2$ in z rekurzivnim predpisom

$$a_{n+1} = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1}$$

za $n \geq 1$. Pokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno in izračunaj njegovo limito. Ali lahko izberemo začetni člen $a_1 > 1$ tako, da bo zaporedje divergentno?

Rešitev: Najprej pogledjmo diagram.



Z grafa sklepamo, da bo pri začetni vrednosti $a_1 = 2$ zaporedje naraščajoče in omejeno na intervalu $(1, 3)$.

Dokažimo najprej z indukcijo, da za vsak n velja $a_n \in (1, 3)$.

$a_n > 1$:

Po predpostavki je $a_1 = 2 > 1$, zato denimo, da za nek n velja $a_n > 1$. Potem je:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> 1, \\ \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} &> 1, \\ 5a_n - 3 &> a_n + 1, \\ 4a_n &> 4. \end{aligned}$$

Zadnja neenakost velja po indukcijski predpostavki. Opomnimo še, da smo lahko pomnožili obe strani z imenovalcem leve strani, ker je le ta pozitiven.

$a_n < 3$:

Spet je po predpostavki $a_1 = 2 < 3$, zato denimo, da za nek n velja $a_n < 3$. Potem sledi:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< 3, \\ \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} &< 3, \\ 5a_n - 3 &< 3a_n + 3, \\ 2a_n &< 6. \end{aligned}$$

Tudi tokrat zadnja neenakost velja po indukcijski predpostavki. Oboje skupaj nam pove, da je zaporedje (a_n) omejeno.

Pokazati moramo še, da je zaporedje naraščajoče. To sledi iz neenakosti:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> a_n, \\ \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} &> a_n, \\ 5a_n - 3 &> a_n^2 + a_n, \\ 0 &> a_n^2 - 4a_n + 3. \end{aligned}$$

Zadnja neenakost drži za $a_n \in (1, 3)$, kar pa vemo, da je res v našem primeru.

Dokazali smo torej, da je zaporedje (a_n) naraščajoče in navzgor omejeno s 3, od koder pa sledi, da je konvergentno. Označimo njegovo limito z a . Če na obeh straneh rekurzivne zveze izračunamo limito, dobimo:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} / \lim_{n \rightarrow \infty}, \\ a &= \frac{5a - 3}{a + 1}, \\ a^2 - 4a + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Ta enačba ima rešitvi $a = 1$ in $a = 3$. Ker so vsi členi zaporedja večji ali enaki 2, je torej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 3.$$

Če izberemo drug začetni člen $a_1 > 1$, dobimo naslednjo situacijo:

- Če je $a_1 \in (1, 3)$, je zaporedje (a_n) naraščajoče in $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 3$.
- Če je $a_1 \in (3, \infty)$, je zaporedje (a_n) padajoče in $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 3$.
- Če je $a_1 = 3$, je $a_n = 3$ za vsak n .

V vsakem primeru je torej zaporedje konvergentno. □

- [3] Diagram.
- [1] Opazka, da je zaporedje naraščajoče in omejeno.
- [4] Po dve točki za dokaz omejenosti zaporedja navzdol in navzgor.
- [4] Dokaz monotonosti.
- [4] Dokaz, da je zaporedje konvergentno in izračun limite.
- [4] Obrazložitev, da zaporedje pri nobenem začetnem členu ne more biti divergentno.

(5) Zaporedje (a_n) je podano s predpisom

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

(a) Dokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno.

(b) Ugotovi, ali je zaporedje (a_n^n) konvergentno. Če je, izračunaj njegovo limito.

Rešitev: (a) Poglejmo prvih nekaj členov zaporedja:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ a_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}, \\ a_3 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20}. \end{aligned}$$

Na podlagi teh prvih nekaj členov lahko postavimo domnevo, da je zaporedje (a_n) padajoče.

Dokazati moramo, da za vsako naravno število n velja $a_{n+1} < a_n$ oziroma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} &< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}, \\ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} &< \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Če obe strani neenačbe pomnožimo z $(n(2n+1)(2n+2))$, pridemo do:

$$\begin{aligned} n(2n+2) + n(2n+1) &< (2n+1)(2n+2), \\ 2n^2 + 2n + 2n^2 + n &< 4n^2 + 6n + 2, \\ 0 &< 3n + 2. \end{aligned}$$

Zadnja neenakost drži za vsako naravno število n , kar pomeni, da je zaporedje (a_n) padajoče. Ker so vsi členi pozitivni, je tudi omejeno, po izreku s predavanj pa od tod sledi, da je konvergentno. Z uporabo metod, ki jih zaenkrat še ne poznamo, bi lahko dokazali, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \ln 2.$$

(b) Ker je $a_3 = \frac{19}{20}$ in je zaporedje (a_n) padajoče, za $n \geq 3$ velja $a_n \leq \frac{19}{20}$. Od tod dobimo oceno

$$0 \leq a_n^n \leq \left(\frac{19}{20}\right)^n.$$

Na desni strani neenakosti imamo geometrijsko zaporedje s $q = \frac{19}{20} < 1$, ki konvergira proti 0. Z uporabo primerjalnega kriterija od tod dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^n) = 0.$$

□

- [3] Opazka, da je zaporedje (a_n) padajoče.
- [7] Dokaz, da je zaporedje padajoče.
- [2] Sklep, da zaporedje konvergira.
- [4] Ocena (a_n^n) z geometrijskim zaporedjem.
- [4] Uporaba primerjalnega kriterija in izračun limite.