

--	--	--	--	--	--	--	--

Σ

--

Ime in priimek _____

Vpisna številka

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna

P

 oziroma napačna

N

.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

N

 Če za preslikavo $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ obstajata taki različni točki $a, b \in M$, da je $d(a, b) > 0$, potem (M, d) ni metrični prostor.

N

 Množica $(0, 1) \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktna v \mathbb{R}^2 z evklidsko metriko.

N

 V poljubnem metričnem prostoru nobena odprta krogla ni zaprta množica.

P

 Vsaka zaprta množica v metričnem prostoru vsebuje vsa svoja stekališča.

N

 Naj bo $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcijsko zaporedje, za katero obstaja tako zaporedje pozitivnih števil a_n , da za vsaka $x \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$ velja $f_n(x) < a_n$ ter vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ enakomerno konvergira na \mathbb{R} .

N

 Unija poljubne družine zaprtih podmnožic poljubnega metričnega prostora je zaprta množica.

P

 Če potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n$ konvergira za $x=2$ in divergira za $x=0$, je njen konvergenčni polmer enak 1.

N

 Če je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neskončnokrat odvedljiva funkcija in je $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ prirejena Taylorjeva vrsta, potem za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$.

P

 Obstaja potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, ki konvergira le za $x=a$.

P

 Enakomerno konvergentno zaporedje zveznih funkcij ima zvezno limitno funkcijo.

2. naloga (20 točk)

Dana je funkcija $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^a + x^{a+2}}}.$$

Če zavrtimo območje med grafom funkcije f in abscisno osjo okrog abscisne osi dobimo telo T_a .

a) Izračunaj prostornino telesa T_0 .

b) Ugotovi, za katere vrednosti $a \in \mathbb{R}$ ima telo T_a končno prostornino.

3. naloga (20 točk)

a) Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{x^2} \sin x - x^3 + x^5}{\ln(1 + 11x^5)}.$$

b) Določi definicijsko območje D funkcijske vrste

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

in dokaži, da je f zvezna na celotnem območju D .

4. naloga (20 točk)

Na množico $M = \mathbb{R}^2$ vpeljemo predpis

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - x_1| & ; \quad y_1 = y_2 \\ |x_2 - x_1| + |y_1| + |y_2| & ; \quad y_1 \neq y_2 \end{cases}$$

a) Dokaži, da je d metrika.

b) Skiciraj zaprti krogi $\overline{K}((0, 1), 1)$ in $\overline{K}((0, 1), 2)$.

5. naloga (20 točk)

Naj bo $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, za katero je $|\int_1^x f(t) dt| \leq 1$ za vsak $x \in [1, \infty)$. Dokaži, da potem splošeni integral

$$\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}} dx$$

konvergira za vsak $\alpha > 0$.

NAMIG: Integracija po delih.

②

$$a) V = \pi \int_0^{\infty} f(x)^2 dx = \pi \int_0^{\infty} \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx =$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} t^2 dt = \pi \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^4}{24}$$

\uparrow
 $t = \arctan x$
 $dt = \frac{dx}{1+x^2}$

⑦

$$b) V(T_a) = \pi \int_0^{\infty} \frac{\arctan^2 x}{x^a(1+x^2)} dx = I$$

① \bar{c} \bar{p} $a > 0$ imamo singularnost pri $x=0$: $\arctan^2 x \sim x^2 \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{\arctan^2 x}{x^{a-2} x^2 (1+x^2)} = \frac{\varphi(x)}{x^{a-2}}, \quad \alpha = a-2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \xrightarrow{1} =$$

$$\stackrel{L'H}{=} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} \right]^2 \cdot 1 = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

\downarrow
 1

\Rightarrow I obstaja pri $x=0$ za $\alpha = a-2 < 1$

$$\Leftrightarrow \underline{a < 3}$$

⑦

② obstaj pri " $x=\infty$ ": $\arctan x \approx \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x^{a+2} (1+x^{-2})}, \quad \alpha = a+2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$$

I obstaja "pri ∞ " $\Leftrightarrow \alpha = a+2 > 1 \Leftrightarrow \underline{a > -1}$ ⑥

$$V(T_a) < \infty \Leftrightarrow a \in (-1, 3)$$

3

$f(x)$

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{x^2} \sin x - x^3 + x^5}{\ln(1 + 11x^5)} = \frac{1}{6}$$

$$f(x) = \frac{x^2(1+x^2+\frac{x^4}{2}+\dots)(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}-\dots)-x^3+x^5}{11x^5+\dots} =$$

$$= \frac{x^3[(1+x^2+\dots)(1-\frac{x^2}{6}+\dots)-1+x^2]}{11x^5+\dots} =$$

$$= \frac{x^3[x^2(1-\frac{1}{6}+1)+\dots]}{11x^5+\dots} \rightarrow \frac{\frac{11}{6}}{11} = \frac{1}{6}$$

10

b) Vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = f(x)$ konvergirava

za $x > 1$, $D = (1, \infty)$

3

Noj bo $a > 1$ in $x \in (a, \infty) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^a}$$

ker $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ konvergirava \Rightarrow

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ enakomerno konvergirava

na (a, ∞) in ima sverne člene

$\Rightarrow f$ je sverna na (a, ∞) za $\forall a > 1$

$\Rightarrow f$ je sverna na $(1, \infty) = D$

7

$$(4) d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - x_1| & ; y_1 = y_2 \\ |x_2 - x_1| + |y_1| + |y_2| & ; y_1 \neq y_2 \end{cases}$$

a) [1] $d(T_1, T_2) \geq 0 \checkmark$

$$d = d(T_1, T_2) = 0 \implies y_1 = y_2 \text{ (since } d \geq |y_1| + |y_2| > 0 \text{)}$$

$$\implies d = |x_2 - x_1| = 0 \implies x_1 = x_2 \implies T_1 = T_2 \checkmark$$

$$T_1 = T_2 \implies y_1 = y_2 \implies d(T_1, T_2) = |x_2 - x_1| = 0 \checkmark$$

[2] $d(T_2, T_1) = \begin{cases} |x_1 - x_2| & ; y_2 = y_1 \\ |x_1 - x_2| + |y_2| + |y_1| & ; y_2 \neq y_1 \end{cases} = d(T_1, T_2)$

[3] $d(T_1, T_2) \leq d(T_1, T_3) + d(T_3, T_2) \quad (\Delta)$

Operiamo: $d(T_k, T_e) \geq |x_e - x_k| \quad \text{---} \rightarrow$

1) $y_1 = y_2$: $d(T_1, T_2) = |x_2 - x_1| \leq |x_3 - x_1| + |x_3 - x_2| \leq d(T_1, T_3) + d(T_3, T_2)$

2) $y_1 \neq y_2$: $d(T_1, T_2) = |x_2 - x_1| + |y_1| + |y_2|$

2.1) $y_1 = y_3 (\neq y_2)$: $d(T_1, T_3) = |x_3 - x_1|$

$$d(T_3, T_2) = |x_3 - x_2| + |y_3| + |y_2| =$$

$$= |x_3 - x_2| + |y_1| + |y_2|$$

$$\text{---} \leq \text{---} + \text{---} \text{ in } \text{---} = \text{---}$$

$$\implies (\Delta) \checkmark$$

2.2) $y_2 = y_3 (\neq y_1)$ simetrična 2.1)

2.3) y_1, y_2, y_3 so različni;

$$d(T_1, T_3) = |x_3 - x_1| + |y_1| + |y_3|, d(T_2, T_3) = |x_3 - x_2| + |y_3| + |y_2|$$

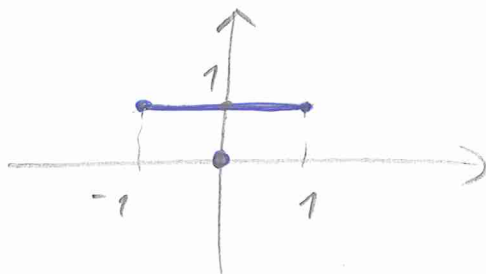
$$\text{---} \leq \text{---} + \text{---}$$

$$\text{---} \leq \text{---} + \text{---} \implies (\Delta) \checkmark$$

$$b) \overline{K}((0,1),1) = \{(x,y); d((x,y),(0,1)) \leq 1\}$$

$$\bullet \underline{y=1}: |x-0| \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1,1]$$

$$\bullet \underline{y \neq 1}: |x| + |y| + 1 \leq 1 \Rightarrow \underline{x=y=0}$$



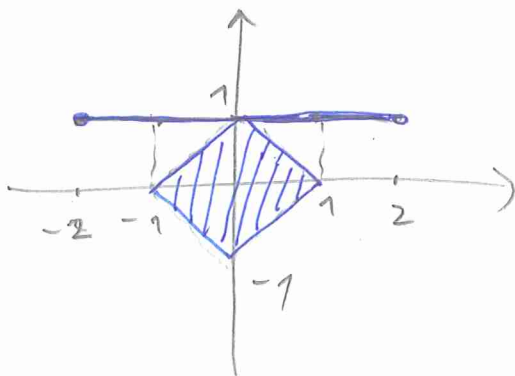
-2

5

$$\overline{K}((0,1),2) = \{(x,y); d((x,y),(0,1)) \leq 2\}$$

$$\bullet \underline{y=1}: |x| \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-2,2]$$

$$\bullet \underline{y \neq 1}: |x| + |y| + 1 \leq 2 \Leftrightarrow \underline{|x| + |y| \leq 1}$$



5

⑤ $f: [1, \infty) \xrightarrow{w} \mathbb{R}$, $\underbrace{\left| \int_1^x f(t) dt \right| \leq 1}_{\textcircled{\smile}} \text{ ca } \forall x \in [1, \infty)$

$$\int_1^b \frac{f(x)}{x^\alpha} dx = x^{-\alpha} F(x) \Big|_1^b + \alpha \int_1^b \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} dx$$

$$du = f(x) dx$$

$$v = x^{-\alpha}$$

$$u = \int_1^x f(t) dt = F(x) \quad dv = -\alpha x^{-\alpha-1} dx$$

ke pogoja $\textcircled{\smile}$ dobimo $|F(x)| \leq 1$ ca

$$\forall x \in [1, \infty) \Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \left[x^{-\alpha} F(x) \Big|_1^b \right] =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\underbrace{b^{-\alpha}}_0 \underbrace{F(b)}_{\text{omejena}} - F(1) \right] = -F(1)$$

Torej $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha} dx$ obstaja, i.e. $\exists \int_1^\infty \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} dx$.

ker je $F(x)$ omejena in $\alpha+1 > 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} dx \text{ obstaja}$$