DODATEK K POGLAVJU III: AHLFORSOVA LEMA

[Zveza med kompleksno analizo (hiperboličnostjo) in diferencialno (Kählerjevo) geometrijo.]

Definicija: Kählerjeva metrika na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$ (ali na Riemannovi ploskvi) je kvadratični diferencial tipa $(1,1)$ oblike

$$ds^2_\Omega = h \cdot dz \cdot d\bar{z} = ds^2_h,$$

kjer je $h : \Omega \to (0, \infty)$ pozitivna $\mathcal{C}^2$ funkcija.

Če dopuščamo možnost ničel, torej $h \geqq 0$ na Ω, pravimo, da je ds^2_Ω psevdometrika.

Opomba: Izraz $dz \cdot d\bar{z}$ je v bistvu tenzorski produkt $dz \otimes d\bar{z}$.

Tu je z (lokalna) holomorfna koordinata na Ω.

Če pišemo $dz = dx + i dy$, je

$$dz \cdot d\bar{z} = |dz|^2 = dx^2 + dy^2$$

standardna Riemannova metrika.

Izraz $ds^2_\Omega = h(z) \cdot (dx^2 + dy^2)$ je R. metrika (1. fundamentalna forma v klasičnem jeziku) z $E = G = h$, $F = 0$. Ker se razlikuje od $dx^2 + dy^2$ le za multiplikativen faktor, določa iste kote, le velikost vektorjev se spremeni.

Če je $v \in T_z \Omega$ tangenten vektor v točki z, je njegova norma glede na metriko ds^2_Ω enaka

$$\|v\|^2_{ds^2_\Omega} = |h(z)| \cdot \|v\|^2 \quad \left(= \|v\|^2_h\right).$$

kjer je $\|v\|$ evklidska dolžina.

<u>Povlek</u>: Če je $z = f(\zeta)$ gladka preslikava, je

$$f^*(ds^2_\Omega)_{(\zeta)} = h(f(\zeta)) \cdot df(\zeta) \cdot \overline{df(\zeta)}.$$

V primeru, da je ~~f~~ <u>holomorfna</u>, dobimo

$$f^*(h\, dz\, d\bar{z}) = (h \circ f) \cdot |f'|^2 \cdot d\zeta.$$

<u>Ukrivljenost</u>: $$K_h = -\frac{2}{h} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(\log h) = -\frac{1}{2h} \cdot \Delta(\log h).$$

<u>Opomba</u>: K_h je povezana z običajno Gaussovo ukrivljenostjo:

$$K_h = h^{-2} \cdot \tilde{K}_h, \quad \tilde{K}_h \text{ Gaussova ukrivlj.}$$

TRDITEV: Ukrivljenost je biholomorfno invariantna:

$$K_{ds^2}(f(z)) = K_{f^* ds^2}(z)$$

za vsako točko z, v kateri je $f'(z) \neq 0$.

Dokaz. Naj bo $ds^2 = h \cdot dz\, d\bar{z}$

$$f^*(ds^2) = (h \circ f) \cdot |f'|^2 \cdot dz\, d\bar{z}$$

$$K_{ds^2}(f(z)) = -\frac{2}{h(f(z))} \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log h\right)(f(z))$$

$$K_{f^* ds^2}(z) = -\frac{2}{h(f(z)) \cdot |f'(z)|^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left(\log h(f(z)) + \log |f'(z)|^2\right)$$

Drugi člen v oklepaju na desni, torej $\log |f'|^2$, je harmonična funkcija v točkah, kjer je $f' \neq 0$. Torej je njen $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ odvod enak 0. Prvi člen odvajamo po verižnem pravilu:

$$\frac{\partial^2}{\partial z \cdot \partial \bar{z}} \log h(f(z)) = \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} (\log h)\Big|_{w = f(z)} \cdot |f'(z)|^2 .$$

Ko vstavimo v izraz za $K_{f^* ds^2}(z)$, se $|f'(z)|^2$ okrajša in dobimo $K_{ds^2}(f(z))$.

OPOMBA: Ta lastnost pomeni, da je ukrivljenost Kählerjeve metrike na Riemannovi ploskvi neodvisna od izbire lokalne holomorfne koordinate, torej je dobro definirana.

NALOGA: Dokaži naslednje lastnosti ukrivljenosti:

Za pozitivni C^2 funkciji $f, g > 0$ velja:

(i) $c K_{c \cdot g} = K_g \quad , \forall c > 0$

(ii) $f \cdot g \cdot K_{fg} = f \cdot K_f + g \cdot K_g$

(iii) $(f+g)^2 K_{f+g} \leq f^2 K_f + g^2 K_g$

(iv) Če je $K_f \leq -k_1 < 0$ in $K_g \leq -k_2 < 0$, je
$$K_{f+g} \leq -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

Pri tem je
$$K_f = K_{f|dz|^2} = -\frac{2}{f}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log f = -\frac{\Delta f}{2f}.$$

PRIMER: $\Omega = \mathbb{D} = \{|z| < 1\}$,

$$ds^2_{\mathbb{D}} = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} \cdot |dz|^2 .$$

Poincaréjeva metrika na $\mathbb{D}$.

$$h(z) = \frac{4}{(1-|z|^2)^2}$$

Izračunajmo ukrivljenost:

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z} \log h(z) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar z} \left(\log 4 - 2 \log(1-|z|^2)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left(2 \cdot \frac{1}{1-|z|^2} \cdot z \right)$$

$$= \frac{2 \cdot (1-|z|^2) - 2z(-\bar z)}{(1-|z|^2)^2}$$

$$= \frac{2}{(1-|z|^2)^2} = \frac{h}{2}$$

Torej: $K_{ds^2_{\mathbb{D}}} = -\frac{2}{h} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z} \log h \equiv -1$.

Poincaréjeva metrika na $\mathbb{D}$ (normalizirana s konstanto 4) ima konstantno ukrivljenost -1.

~~Integrirana oblika Poincaréjeve metrike:~~

$$\cancel{\operatorname{dist}(p,q) = \log \frac{1+|\varphi_p(q)|}{1-|\varphi_p(q)|} = 2 \operatorname{arctanh} |\varphi_p(q)|},$$

~~kjer je $\varphi_p \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$, ki zadosta $\varphi_p(p) = 0$.~~

IZREK. (Posplošena Schwarzova lema)

Za vsako holomorfno preslikavo $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ velja

$$f^* ds^2_{\mathbb{D}} \leq ds^2_{\mathbb{D}} . \qquad (1)$$

Ekvivalentno:

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2} ; \quad \forall z \in \mathbb{D}. \qquad (2)$$

oz. z diferenciali:

$$\frac{|df(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{|dz|}{1-|z|^2} \qquad (3)$$

Če velja enakost v eni točki, je $f \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$ in tedaj velja enakost v vseh točkah.

Dokaz.

$$f^* ds^2_{\mathbb{D}} = f^*\left(\frac{4}{(1-|w|^2)^2}|dw|^2\right)$$

$$= \frac{4}{(1-|f|^2)^2} \cdot |f'|^2 \cdot |dz|^2$$

Neenakost $f^* ds^2_{\mathbb{D}} \leq ds^2_{\mathbb{D}}$ je torej ekvivalentna

$$\frac{4}{(1-|f(z)|^2)^2} \cdot |f'(z)|^2 \leq \frac{4}{(1-|z|^2)^2}$$

Po korenjenju dobimo obliko (2).

Za dokaz trditve (2) fiksiramo točko $z \in \mathbb{D}$ in def avtomorfizma $\varphi_z(\zeta) = \dfrac{\zeta + z}{1+\bar{z}\zeta}$; $\varphi_z \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$

ter $\psi_{f(z)}(\zeta) = \dfrac{\zeta - f(z)}{1-\overline{f(z)}\cdot\zeta}$, $\psi_{f(z)} \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$.

Velja:
$$\begin{cases} \varphi_z(0) = z, \quad \varphi_z'(0) = 1-|z|^2 \\ \psi_{f(z)}(f(z)) = 0, \quad \psi'_{f(z)}(f(z)) = \dfrac{(-1)}{1-|f(z)|^2} \end{cases}$$

Kompozicija $g_z = g = \psi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_z : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$

preslika disk vase in zadošča $g(0)=0$.

Iz klasične Schwarzove leme sledi:

(a) $|g'(0)| \leq 1$

(b) $|g'(0)| = 1 \iff g(\zeta) = e^{it}\cdot\zeta$.

(rotacija); torej $g \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$.

Iz (a) sledi:

$$|g'(0)| = \frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2}\cdot|f'(z)| \leq 1$$

oziroma

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}. \qquad (2).$$

Enakost v eni točki $z \in \mathbb{D}$ pomeni, da je g_z rotacija, torej je $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$.

Integrirana oblika Poincaréjeve metrike:

$$\operatorname{dist}_{\mathbb{D}}(p,q) = \inf_{\gamma} \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|_{ds^2_{\mathbb{D}}} \cdot dt$$

kjer je inf po vseh poteh med ~~γ(0)~~
$\gamma(0) = p$ in $\gamma(1) = q$.

Poseben primer: $p = 0$, $q = x \in [0,1)$.
$\gamma(t) = t$, $\dot\gamma(t) = 1$.

Ker je $ds^2_{\mathbb{D}} = \dfrac{4}{(1-|z|^2)^2}|dz|^2$ radialno simetrična,
je najkrajša pot po daljici.

$$\operatorname{dist}_{\mathbb{D}}(0,x) = 4\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = 2\log\frac{1+x}{1-x}$$
$$= 2 \operatorname{arctanh} x .$$

Sedaj upoštevamo, da je metrika $ds^2_{\mathbb{D}}$, in s tem Poincaréjeva razdalja $\operatorname{dist}_{\mathbb{D}}(\cdot,\cdot)$, biholomorfno invariantna. Izberemo avtomorfizem $\varphi_p \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$, tako da je $\varphi_p(p) = 0$, $\varphi_p(q) \in [0,1)$. Tedaj:

$$\operatorname{dist}_{\mathbb{D}}(p,q) = \operatorname{dist}_{\mathbb{D}}(\varphi_p(p), \varphi_p(q)) = 2\cdot\log\frac{1+|\varphi_p(q)|}{1-|\varphi_p(q)|} .$$

IZREK (Ahlforsova lema).
Denimo, da Kählerjeva metrika $ds_h^2 = h \cdot |dz|^2$ na domeni Ω (ali na Riemannovi ploskvi) zadošča

$$K_h = K_{ds_h^2} \leq -L < 0$$

za neko konstanto $L > 0$. Potem za vsako holomorfno preslikavo $f : \mathbb{D} \to \Omega$ velja neenakost

$$\boxed{f^*(ds_h^2) \leq \frac{1}{L} \cdot ds_{\mathbb{D}}^2} \qquad (4)$$

kjer je $ds_{\mathbb{D}}^2 = \frac{4}{(1-|z|^2)^2}|dz|^2$ Poincaréjeva metrika na disku.

Interpretacija (4): $f^*(ds_h^2)(z) = h(f(z)) \cdot |f'(z)|^2 \cdot |dz|^2$

Torej:
$$(4) \iff h(f(z)) \cdot |f'(z)|^2 \leq \frac{1}{L} \cdot \frac{4}{(1-|z|^2)^2}$$

$$\iff |f'(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h(f(z))}} \cdot \frac{2}{1-|z|^2}.$$

$$z = 0: \quad |f'(0)| \leq \frac{2}{\sqrt{L} \cdot \sqrt{h(f(0))}}.$$

Vrednost odvoda $|f'(0)|$ (ali $|f'(z)|$ v poljubni točki) je navzgor omejena glede na vrednost $f(0)$ in je neodvisna od izbire f. Metrika ds_h^2 s to lastnostjo se imenuje *hiperbolična*.

OPOMBA: $K_h = -\frac{2}{h}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log h$

Pogoj $K_h \leqq -L < 0$ je ekvivalenten pogoju:

$$\frac{2}{h} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\log h) \geqq L > 0$$

oziroma

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}^2} (\log h) \geqq \tfrac{1}{2} L \cdot h$$

$$\Delta (\log h) \geqq 2 \cdot L \cdot h$$

Če pišemo $\log h = g$, $h = e^g$, je

$$\boxed{\begin{gathered} ds^2 = e^g \cdot |dz|^2 \\ K \leqq -L < 0 \iff \Delta g \geqq 2L \cdot e^g \end{gathered}}$$

To pomeni, da raste Δg ~~kot~~ vsaj tako hitro kot e^g; g je zelo močno (strogo) subharmonična.

<u>Dokaz</u>. Označimo $f^*(ds_h^2) = \tilde{h}\cdot|dz|^2$; $\tilde{h} = (h\circ f)\cdot|f'|^2$.

$$ds_{\mathbb{D}}^2 = g\cdot|dz|^2 \; ; \; g(z) = \frac{4}{(1-|z|^2)^2}.$$

Naj bo $u = \frac{\tilde{h}}{g} \geqq 0$. Ocena (4) je ekvivalentna

$$\sup_{\mathbb{D}} u \leqq \frac{1}{L}.$$

Predpostavimo, da je f holomorfna na neki okolici zaprtega diska $\overline{\mathbb{D}}$. (Splošen primer zlahka reduciramo na ta primer z uvedbo funkcij $f_r(z) = f(rz)$, $r<1$, ter limitnim prehodom $r \nearrow 1$.)

Tedaj je $u(z) = \frac{\tilde{h}(z).(1-|z|^2)^2}{4}$ in ker je $\tilde{h}$ gladka ~~zvezna~~ na $\overline{\mathbb{D}}$, je $u = 0$ na $|z|=1$. Torej u doseže maksimum v neki notranji točki $z_0 \in \mathbb{D}$. Lahko vzamemo, da je $u(z_0) > 0$, sicer ni kaj dokazovati.

Sledi, da je $f'(z_0) \neq 0$. Tudi $\log u$ doseže v z_0 (lokalni) maksimum in zato

$$\Delta(\log u)(z_0) \leqq 0.$$

Torej:

$$\Delta(\log u)(z_0) = \Delta(\log\tilde{h})(z_0) - \Delta(\log g)(z_0) \leqq 0. \quad (5)$$

Iz formule za ukrivljenost sledi:

$$\Delta(\log \tilde{h})(z_0) = -2\tilde{h}(z_0)\cdot K_{\tilde{h}}(z_0)$$
$$= -2\tilde{h}(z_0)\cdot K_h(f(z_0))$$

V drugem enačaju smo upoštevali, da je $f'(z_0) \neq 0$ in je ukrivljenost biholomorfna invarianta.

Prav tako je

$$\Delta(\log g)(z_0) = -2g(z_0)\cdot K_g(z_0)$$
$$= 2g(z_0)$$

saj je $K_g \equiv -1$.

Če vstavimo v zgornjo oceno (5), dobimo:

$$-2\tilde{h}(z_0)\cdot K_h(f(z_0)) \leqq 2g(z_0). \qquad (6)$$

Po predpostavki izreka je $K_h \leqq -L^{<0}$ na Ω.

Zato je $-2\tilde{h}(z_0)\cdot K_h(z_0) \geqq 2\tilde{h}(z_0)\cdot L$. (7)

Iz primerjave (6) in (7) sledi

$$2\tilde{h}(z_0)\cdot L \leqq 2g(z_0)$$

oziroma, po deljenju z $2g(z_0)\cdot L$:

$$u(z_0) \leqq \frac{1}{L}.$$