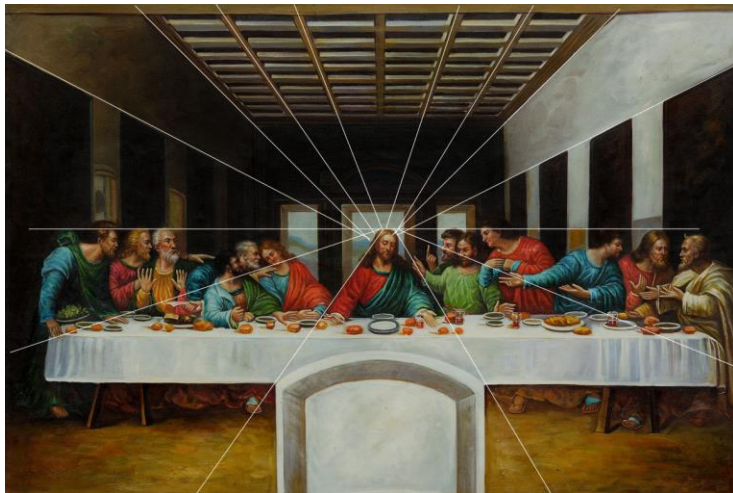


Projektivna geometrija

+

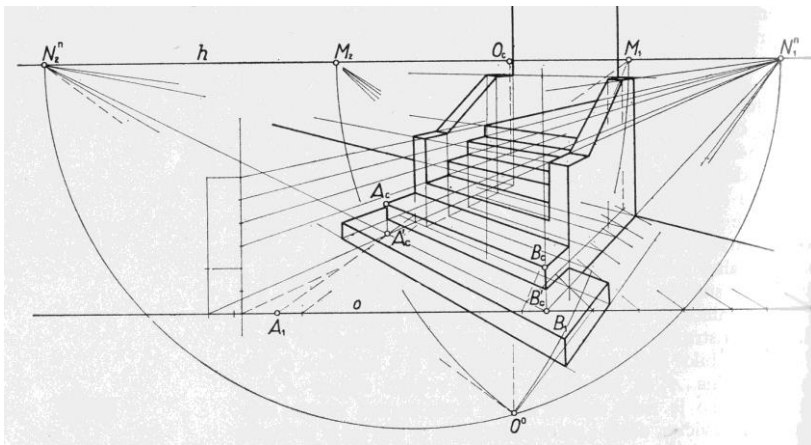
kombinatorika

- Renesansa: študij perspektive

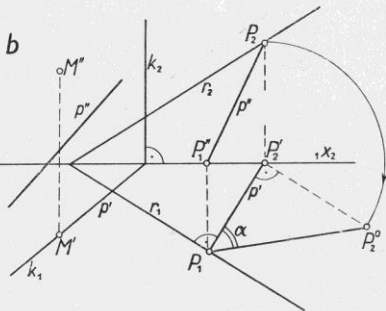


Črte, ki so v prostoru (3D) vzporedne, v projekcijski ravnini niso.

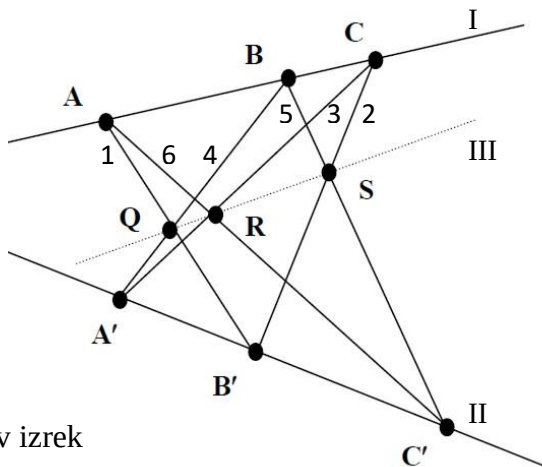
- 1795 Gaspard Monge: Géométrie descriptive



Vzporedne premice se v projekcijski ravnini sečejo (tokrat v dveh bežiščih).

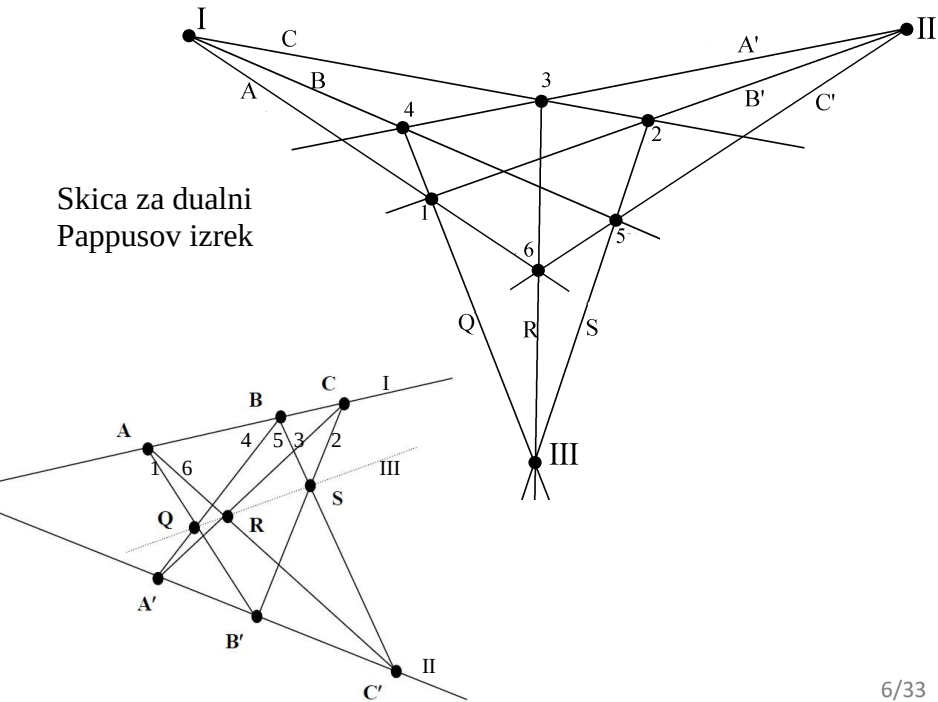


- 1. polovica 19. stoletja: nova veja matematike: projektivna geometrija



Skica za Pappusov izrek

Skica za dualni
Pappusov izrek



Definicija kombinatorične konfiguracije

Imejmo množico točk $\mathbf{V}$ in družino podmnožic množice $\mathbf{V}$, imenovano $\mathbf{B}$ (bloki ali premice). Par $(\mathbf{V}, \mathbf{B})$ je *kombinatorična konfiguracija*, če velja:

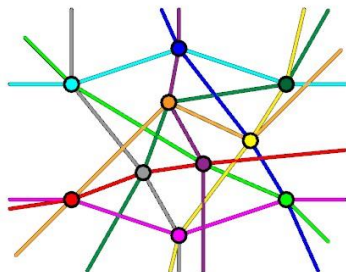
- 1) vsaka točka iz $\mathbf{V}$ je vsebovana v natanko v r blokih,
- 2) vsak blok b iz $\mathbf{B}$ vsebuje natanko k točk iz $\mathbf{V}$,
- 3) vsak par točk iz $\mathbf{V}$ je vsebovan v največ enem bloku iz $\mathbf{B}$.

V množici $\mathbf{V}$ je v točk, v množici $\mathbf{B}$ je b blokov.
Zapis kombinatorične konfiguracije:

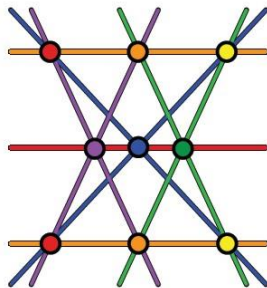
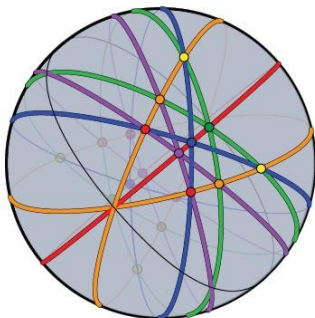
$$(v_r ; b_k)$$

- Grafični prikaz:

Topološka
konfiguracija

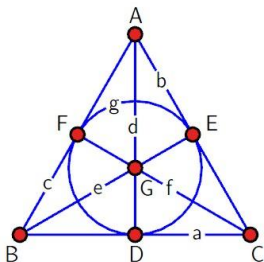


Geometrijska konfiguracija

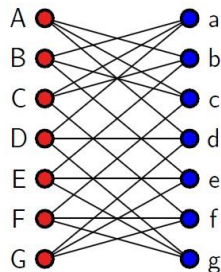


- Kombinatorična konfiguracija:

Primer: Fanova ravnina (7_3)

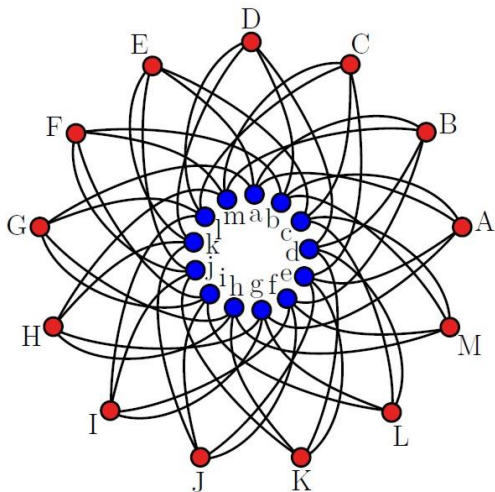


	A	B	C	D	E	F	G
a		•	•	•			
b	•		•		•		
c	•	•				•	
d	•			•			•
e		•			•		•
f			•			•	•
g				•	•	•	



- Kombinatorična konfiguracija:

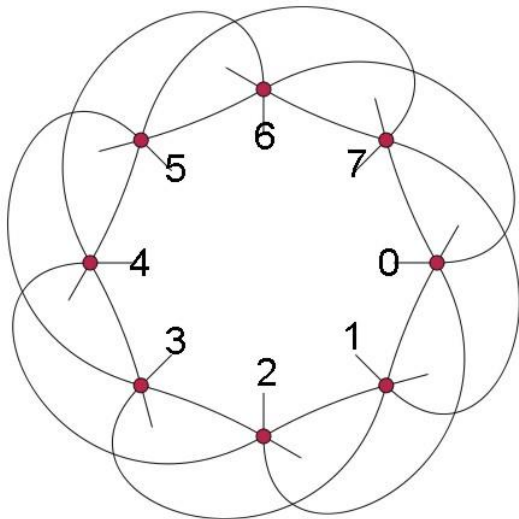
Primer: incidenčni graf (Levi–jev graf) (13_4)



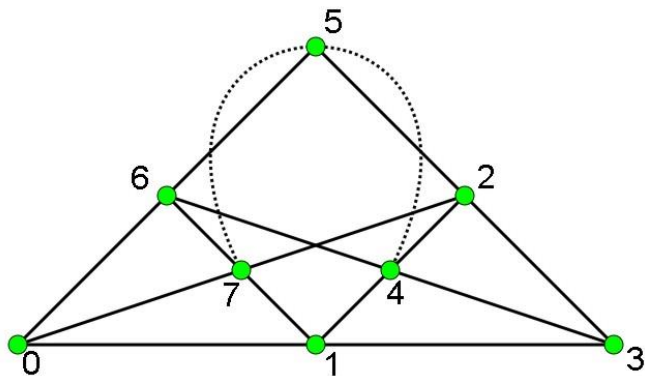
K rešitvi problema soočanj 8 kandidatov

- Projektivne konfiguracije: Möbius – Kantorjeva konfiguracija

$(8_3; 8_3)$ oz. (8_3)



- Kombinatorična konfiguracija (8_3)



Kirkmanov problem sprehajanja šolark (1850)

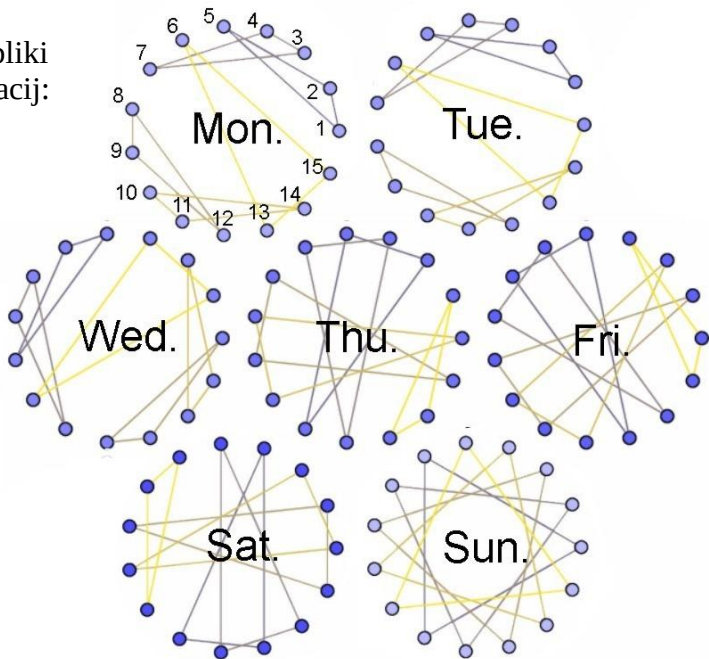
- Fifteen young ladies in a school walk out three abreast for seven days in succession: it is required to arrange them daily so that no two shall walk twice abreast.

- Kombinatorična konfiguracija ($15_7; 35_3$)

- Ena izmed 7 neizomorfnih rešitev je (Wikipedia):

Sun.	Mon.	Tues.	Wed.	Thurs.	Fri.	Sat.
01, 06, 11	01, 02, 05	02, 03, 06	05, 06, 09	03, 05, 11	05, 07, 13	11, 13, 04
02, 07, 12	03, 04, 07	04, 05, 08	07, 08, 11	04, 06, 12	06, 08, 14	12, 14, 05
03, 08, 13	08, 09, 12	09, 10, 13	12, 13, 01	07, 09, 15	09, 11, 02	15, 02, 08
04, 09, 14	10, 11, 14	11, 12, 15	14, 15, 03	08, 10, 01	10, 12, 03	01, 03, 09
05, 10, 15	13, 15, 06	14, 01, 07	02, 04, 10	13, 14, 02	15, 01, 04	06, 07, 10

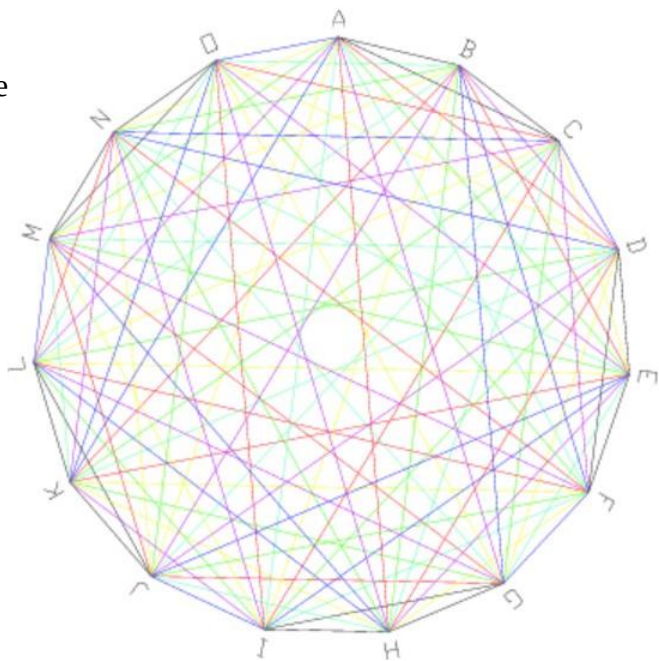
- Ali pa v obliki
7 konfiguracij:



- Druga je (Wolfram Math World):

Sun	ABC	DEF	GHI	JKL	MNO
Mon	ADH	BEK	CIO	FLN	GJM
Tue	AEM	BHN	CGK	DIL	FJO
Wed	AFI	BLO	CHJ	DKM	EGN
Thu	AGL	BDJ	CFM	EHO	IKN
Fri	AJN	BIM	CEL	DOG	FHK
Sat	AKO	BFG	CDN	EIJ	HLM

- Združene konfiguracije za 7 dni:



- Fanov projekcijski prostor

$PG(3,2)$

15 točk

35 linij

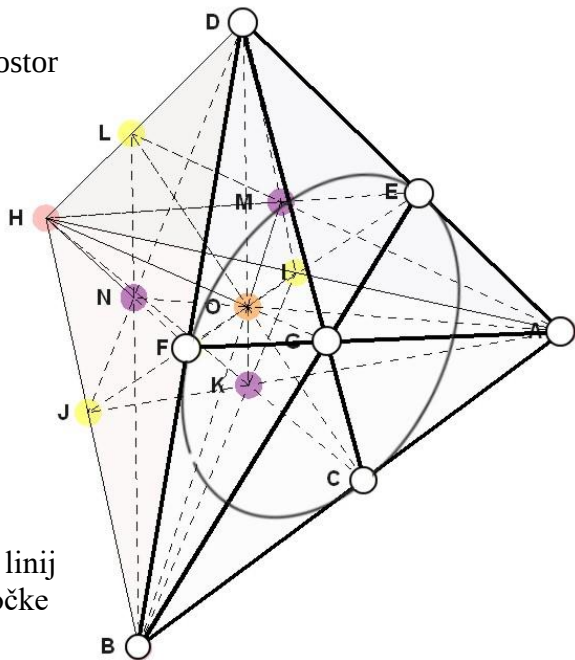
15 ravnin

vsaka ravnina

vsebuje 7 točk in 7 linij

skozi vsako točko gre 7 linij

vsaka linija vsebuje 3 točke



- Kirkmanov problem,
rešitev enega dne:

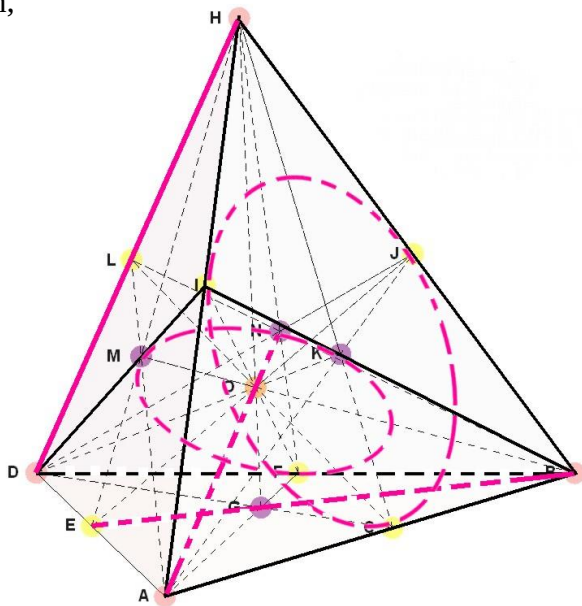
AON

BGE

CIJ

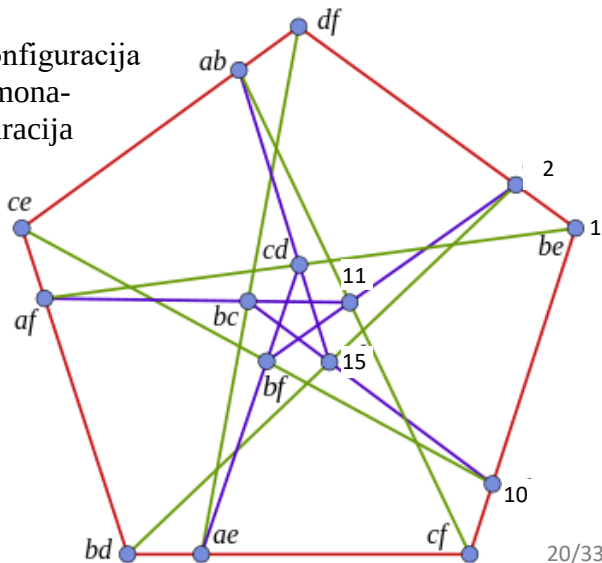
DLH

FKM



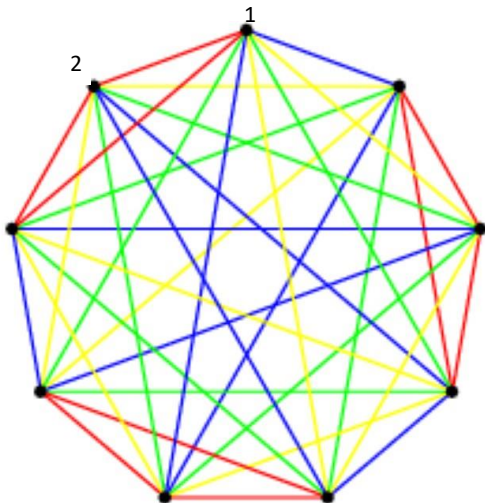
K rešitvi problema soočanj 15 kandidatov

- Vaje, točka c:
kombinatorična konfiguracija
(15₃; 15₃), t.i. Cremona-
Richmond konfiguracija



K rešitvi Steinerjevega sistema trojk reda 9

- $S(2,3,9)$ oz. STS(9):



Latinski kvadrati

Eulerjev problem 36 častnikov

- 36 častnikov iz 6 regimentov (a,b,c,d,e,f) iz vsakega po 6 činov ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$) razporedi v formacijo 6×6 tako, da bodo v vsaki vrsti in vsaki koloni formacije prisotni predstavniki vseh regimentov in činov.
- Skoraj rešitev. (b ζ in d ϵ se pojavita 2x, b ϵ in d ζ pa nikoli)

a α	b ζ	c δ	d ϵ	e γ	f β
b β	c α	f ϵ	e δ	a ζ	d γ
c γ	d ϵ	a β	b ζ	f δ	e α
d δ	f γ	e ζ	c β	b α	a ϵ
e ϵ	a δ	b γ	f α	d β	a ζ
f ζ	e β	d α	a γ	c ϵ	b δ

Poimenovanje: grško-latinski kvadrat (*graeco - latin square*) ali tudi par ortogonalnih latinskih kvadratov.

- Rešitev problema na formaciji 5×5 . Običajen Eulerjev zapis

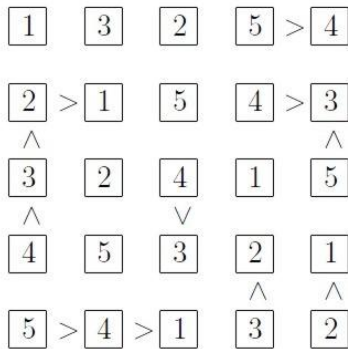
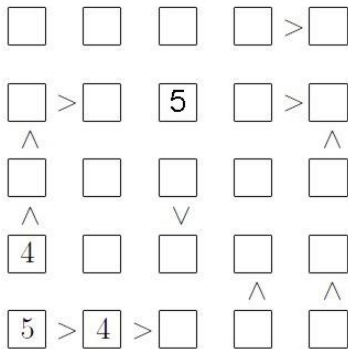
1^1	2^5	3^4	4^3	5^2
2^2	3^1	4^5	5^4	1^3
3^3	4^2	5^1	1^5	2^4
4^4	5^3	1^2	2^1	3^5
5^5	1^4	2^3	3^2	4^1

- Sudoku, latinski kvadrat z dodanim pogojem, da mora v sektorjih 3×3 biti vsebovanih vseh 9 števil (brez 0).

		7	5		2	9		
	9	6		8			1	
8		4				6	2	7
7			8		5			3
	4			1			6	
9			6		7			1
1	7	9				2		6
	3			7		1	8	
		2	3		1	5		

3	1	7	5	6	2	9	4	8
2	9	6	7	8	4	3	1	5
8	5	4	1	3	9	6	2	7
7	6	1	8	2	5	4	9	3
5	4	8	9	1	3	7	6	2
9	2	3	6	4	7	8	5	1
1	7	9	4	5	8	2	3	6
4	3	5	2	7	6	1	8	9
6	8	2	3	9	1	5	7	4

- Futoshiki, latinski kvadrat z dodanimi relacijami ">" med elementi



<http://www.futoshiki.org/>

- Magični kvadrat:

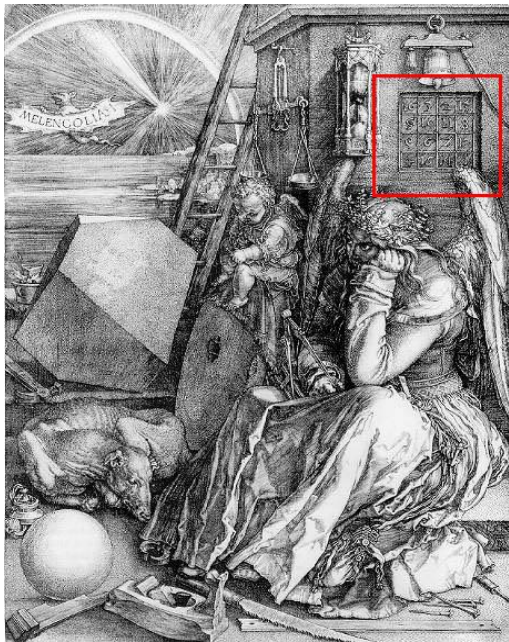
Vsote vrstic, stolpcev in obeh diagonal so enake

Normalni: vsebuje vsa števila od 1 do n^2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Matlab: **magic(n)**

• Dürer: Melencolia I



- Dürerjev magični kvadrat 4x4



Kot običajno, so vsote po stolpcih, vrsticah in obeh diagonalah enake, v Dürerjevem kvadratu je to 34.

Vsote celic po kvadrantih (iste barve) so 34; t.i. gnomonski magični kvadrat.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Vsota katerih koli dveh celic, ležečih točkovno simetrično glede na središče kvadrata je $34/2 = 17$.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Posledica: vsota katerih koli dveh parov točkovno simetrično ležečih celic je 34.

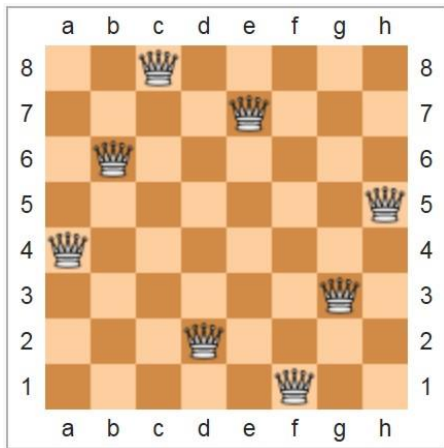
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Spodnja vrstica:
 1514 grafika izdelana
 4→D (Dürer)
 1→A (Albrecht)

- (Bezzel 1848): razporedi 8 kraljic na šahovnico tako, da se ne bodo napadale.

92 rešitev, 12 temeljnih.

1850 Nauck: splošna rešitev za $n \times n$ veliko šahovnico.



Število rešitev:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
temeljnih	1	0	0	1	2	1	6	12	46
vseh	1	0	0	2	10	4	40	92	352

Pravila za iskanje ene izmed rešitev:

- 1) n je sodo, $n \neq 6k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, pozicije kraljic: (stolpec, vrsta):
 $(i, 2i), (n/2 + i, 2i - 1), \quad i = 1, \dots, n/2,$
- 2) n je sodo in $n \neq 6k$, $k \in \mathbb{N}$,
 $(i, 1 + (2i + n/2 - 3 \bmod n)),$
 $(n+1 - i, n - (2i + n/2 - 3 \bmod n)), \quad i = 1, \dots, n/2,$
- 3) n je liho; za $n-1$ uporabi (1) ali (2), dodaj kraljico v (n, n) .