

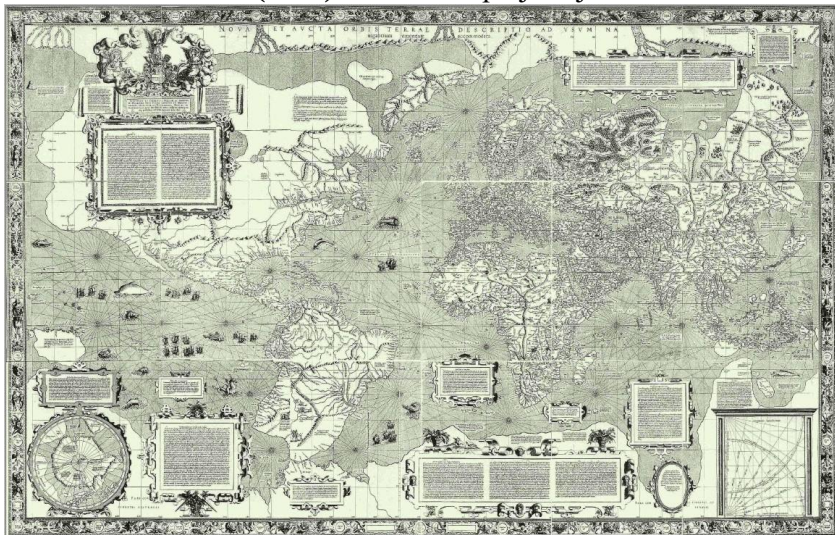
Matematična kartografija

- Orontius Finaeus (1531): psevdokonična projekcija.



<http://www.badarchaeology.com/old-maps/the-orontius-finaeus-map/>

- Gerardus Mercator (1569): cilindrična projekcija.



https://en.wikipedia.org/wiki/Mercator_1569_world_map

O nezmožnosti preslikave krogle na ravnino brez popačenj

- Carl Friedrich Gauss: “Theorema Egregium” (1827) (*omembe vreden teorem*)

Gaussova ukrivljenost: $K = K_1 K_2$

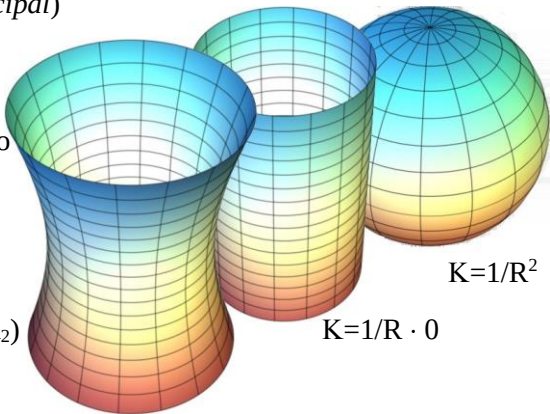
K_1 in K_2 sta glavni (*principal*)

ukrivljenosti. K se ne spremeni z upogibanjem ploskve. Spremeni se lahko samo z deformacijo (raztegovanje, krčenje, popačenje kotov).

$$K = 1/R_1 \cdot (-1/R_2)$$

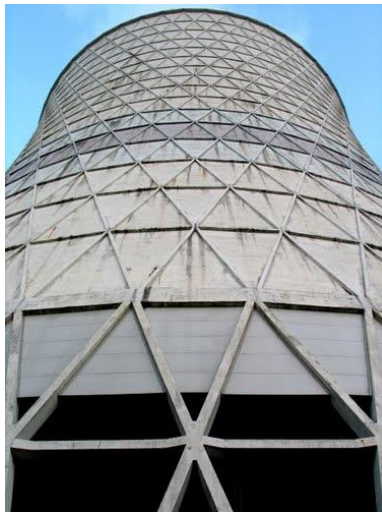
$$K = 1/R \cdot 0$$

$$K = 1/R^2$$



- Posledica: površine krogle ali dela krogelne površine ne moremo preslikati na valj ali stožec ali ravnino brez deformacij.
- Matematična kartografija: študij geometrijskih preslikav elementov s površine krogle ali elipsoida ($K>0$) na ploskev valja, stožca ali ravnine ($K=0$).

- Zanimivost: rotacijski hiperboloid je moč sestaviti iz premic.



Armirano-betonska rebra hladilnega stolpa termoelektrarne Šoštanj

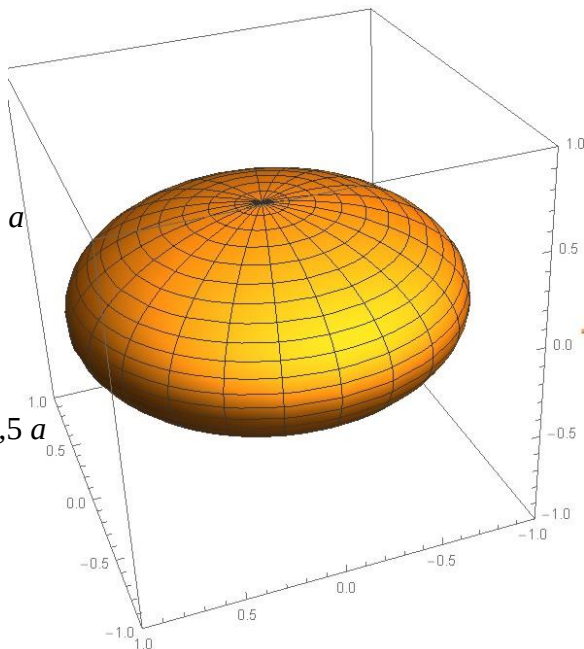
Poimenovanje

- Sferoid

polosi: $a, a, c=0,9967 a$

Na sliki: $c = 0,5 a$

- Geoid



e ... ekscentričnost elipsoida, $e = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}}$, $e = 0,081082$

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \quad N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

R_k ... radij krogle s površino, enaka elipsoidni:

$$R_k = a \left(1 - \frac{e^2}{6} \right) = 6371.0 \text{ km}$$

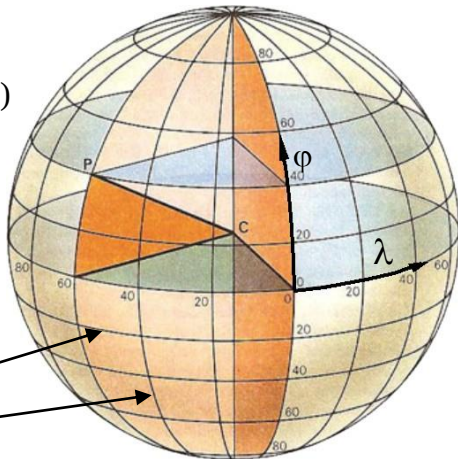
- Oznake

φ ... geografska širina (*latitude*)

λ ... geografska dolžina (*longitude*)

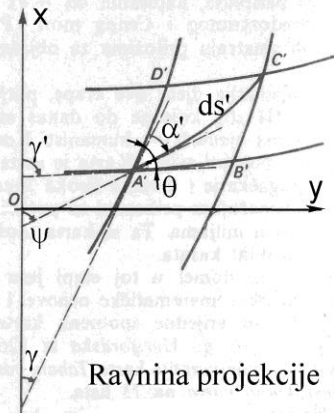
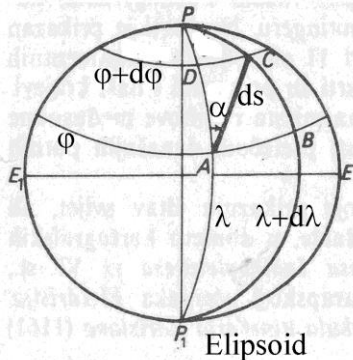
vzporednik (*parallel*)

poldnevnik (*meridian*)



1 minuta geografske širine popiše lok dolžine 1 navtične milje (1852 m)

Deformacije pri preslikavi s krogle na ravnino



- Naloga matematične kartografije:

$$x = f_1(\varphi, \lambda), \quad y = f_2(\varphi, \lambda)$$

- Linearna deformacija d_{lin} in linearni modul l (t.j. merilo):

$$d_{lin} = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{ds'}{ds} - 1 = l - 1$$

kjer je l :

$$l^2 = \frac{E}{M^2} \cos^2 \alpha + \frac{F}{Mr} \sin 2\alpha + \frac{G}{r^2} \sin^2 \alpha$$

α ... azimut;

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2, F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}, G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2$$

$$\tan \alpha = \frac{r d\lambda}{M d\varphi}$$

Anizotropija: $d_{lin}=d_{lin}(\alpha)$ in $l=l(\alpha)$

V smereh poldnevnika in vzporednika je linearni modul (merilo):

$$l(\alpha = 0^\circ) = \frac{\sqrt{E}}{M} = m, \quad l(\alpha = 90^\circ) = \frac{\sqrt{G}}{r} = n$$

- Deformacija površin d_p in modul površin p :

$$d_p = \frac{dp' - dp}{dp} = \frac{dp'}{dp} - 1 = p - 1$$

$$p = m n \sin \theta$$

- Deformacija kotov d_k : $d_k = \alpha' - \alpha$

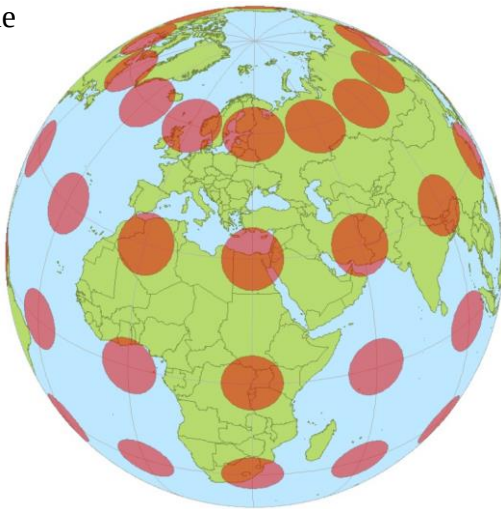
$$\cot \alpha' = \frac{E r}{M H} \cot \alpha + \frac{F}{H}$$

$$H = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

- Tissotova indikatrisa (elipsa deformacij) (1859)

Infinitezimalno majhne
(povečane na sliki).

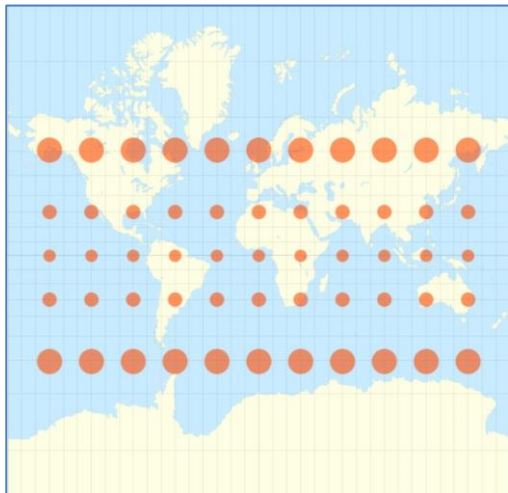
Na elipsoidu so vse
indikatrise krožnice
radija 1.



- Kaj prikazuje Tissotova indikatrisa?

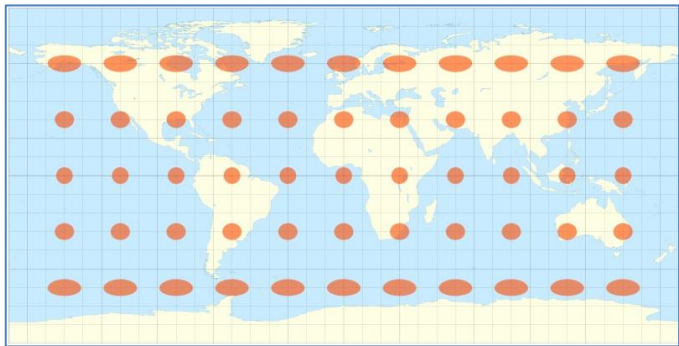
Če indikatrisa ostane krožnica: linearne deformacije v vseh smereh enake. Velikost krožnice pomeni merilo.

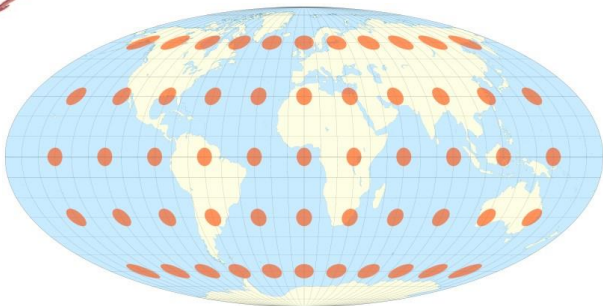
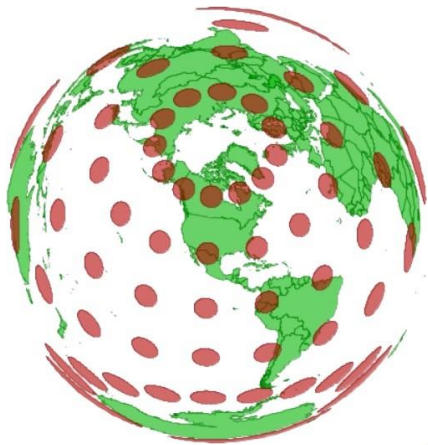
Primer: Mercatorjeva projekcija.



Indikatrisa je elipsa: neenake linearne deformacije v različnih smereh. Polosi elips: merilo

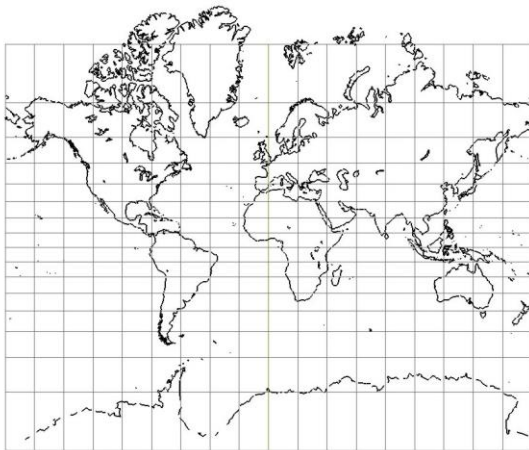
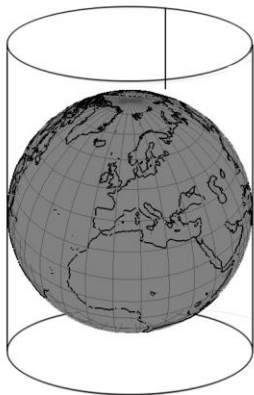
Primer: kvadratna cilindrična projekcija (*equirectangular proj.*)



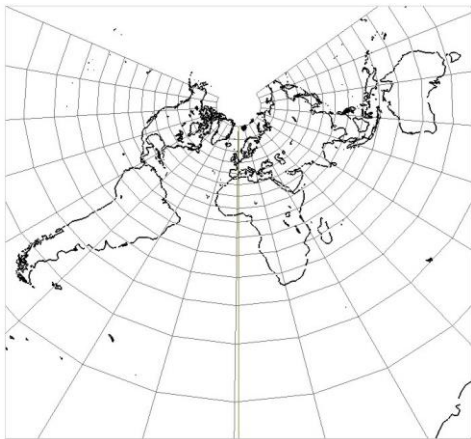
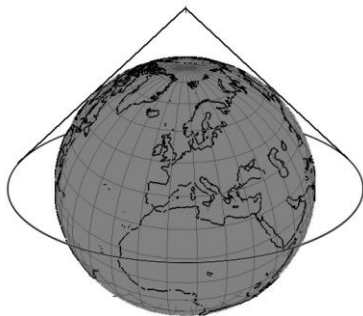


Tipi projekcij glede na projekcijsko površino

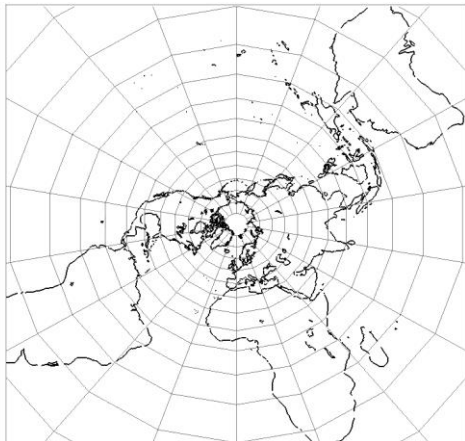
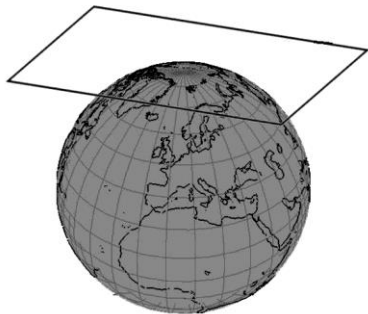
- Cilindrične projekcije



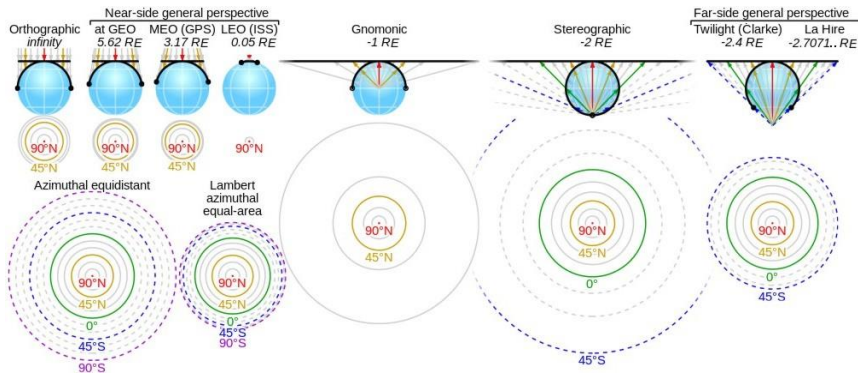
- Konusne projekcije



- Azimutne projekcije



• Nekatere azimutne projekcije



Klasifikacija projekcij glede na preslikavo

- Konformne – istokotne projekcije

$l \neq l(\alpha), \quad l = m = n, \quad \alpha = \alpha'$ Lokalno se oblika ohrani, veliki objekti (celine, otoki, države) so distordirani.

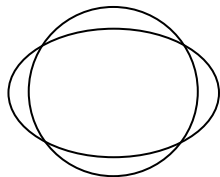
Iz enačbe na str. 15:

$$\cot \alpha' = \frac{E r}{M H} \cot \alpha + \frac{F}{H}, \quad \text{ker } \alpha = \alpha', \quad F=0, \quad \frac{E r}{M H} = 1$$

Cauchy- Riemannovi diferencialni enačbi sta potreben in zadosten pogoj za konformno preslikavo.

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \pm \frac{r}{M} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \pm \frac{r}{M} \frac{\partial x}{\partial \varphi}$$

- Ekvivalentne – istopovršinske projekcije



Tissotovi indikatrisci (krožnica in elipsa) imata enako površino.

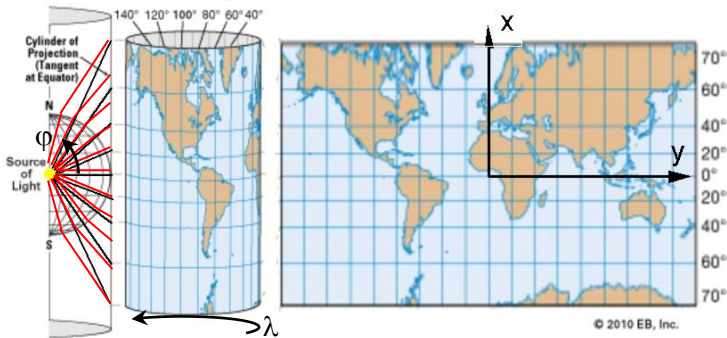
$$p = m n \sin \theta = 1$$

- Ekvidistantne projekcije

Linearni modul je konstanten, vendar samo v eni smeri, običajno $m=1$.

Mercatorjeva projekcija

- Cilindrična, pokončna, konformna preslikava



$$y = f_2(\varphi, \lambda) \Rightarrow y = k \lambda, \quad y \neq y(\varphi), \quad \partial y / \partial \lambda = k, \quad \partial y / \partial \varphi = 0$$

$$x = f_1(\varphi, \lambda) \Rightarrow x = x(\varphi), \quad x \neq x(\lambda), \quad \partial x / \partial \lambda = 0, \quad \partial x / \partial \varphi = ?$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 \rightarrow \sqrt{E} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = k^2 \rightarrow \sqrt{G} = k$$

Ker je x funkcija ene same spremenljivke φ , namesto $\partial x / \partial \varphi$ pišemo $dx/d\varphi$.

Iz skice na str. 9: $r = N \cos(\varphi)$

$$m = \frac{\sqrt{E}}{M} = \frac{1}{M} \frac{dx}{d\varphi}, \quad n = \frac{k}{r} = \frac{k}{N \cos \varphi}$$

Konformna preslikava: $m = n$

$$\frac{1}{M} \frac{dx}{d\varphi} = \frac{k}{N \cos \varphi}$$

$$dx = k \frac{M(\varphi) d\varphi}{N(\varphi) \cos \varphi}$$

Rezultat integracije (pri upoštevanju $k=a$, ter robnega pogoja $\varphi=0$, $x=0$):

- Preslikava z elipsoida na valj (a ... polos, e ... ekscentičnost):

$$y = a \lambda$$

$$x = a \left\{ \ln \left[\tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right] - e \ln \left[\tan \left(45^\circ + \frac{\psi}{2} \right) \right] \right\}$$

$$\psi = \arcsin(e \sin \varphi)$$

- Preslikava s krogle na valj ($a=R_k$, $e=0$, λ v rad.):

$$y = R_k \lambda$$

$$x = R_k \ln \left[\tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

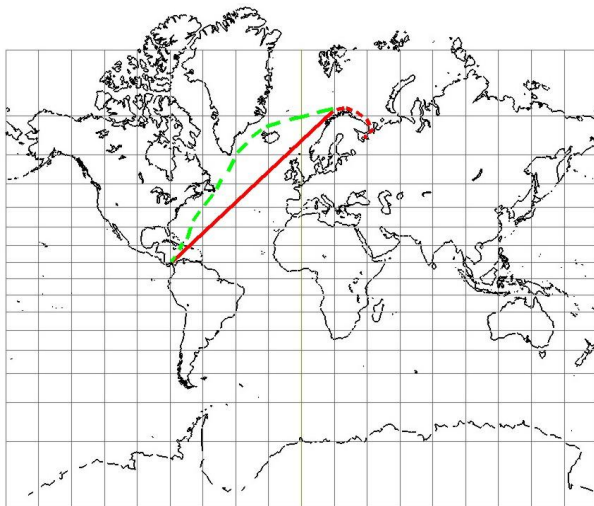
- Uporaba: navigacija: plutje po konstantnem kursu - loksodromi

rdeče: loksodroma

zeleno: najkrajša

pot po morju

(izogibanje kopnega)



- Loksodroma (*rhumb line*)

Na globusu ($e \dots$ osnova naravnih logaritmov):

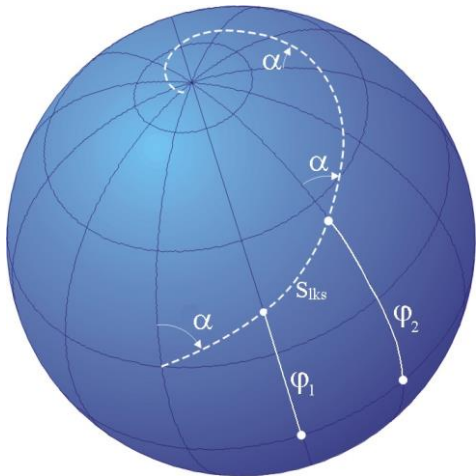
$$\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = e^{\lambda \cot \alpha}$$

Na karti:

$$y_2 - y_1 = \tan \alpha (x_2 - x_1)$$

Dolžina loksodrome (φ [rad]):

$$s_{lks} = R_k \sec \alpha (\varphi_2 - \varphi_1)$$



- Ortodroma oz. geodetka (*great circle*)

Dolžina ortodrome: $s_{otd} = R_k \Delta\sigma$, $\Delta\sigma$ [rad] ... središčni kot

$$\Delta\sigma = 2 \arcsin \sqrt{\sin^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) + \cos \phi_1 \cdot \cos \phi_2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\Delta\lambda}{2} \right)}.$$

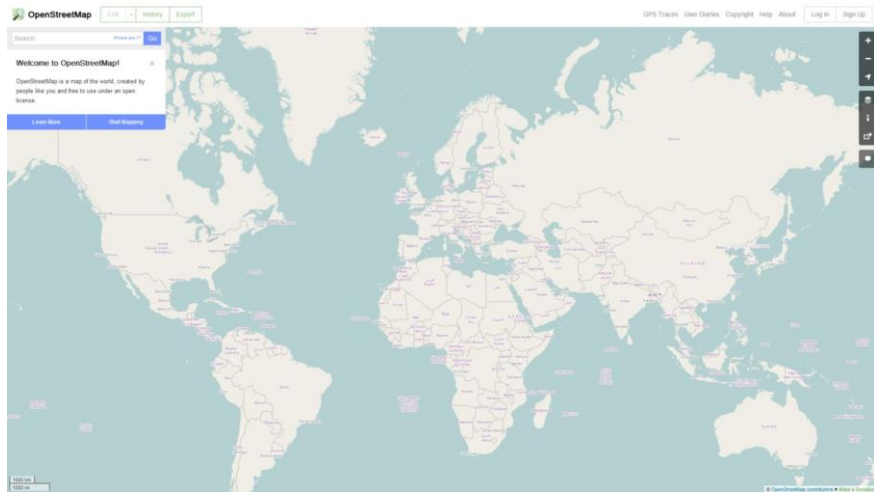
ali

$$\Delta\sigma = \arctan \frac{\sqrt{(\cos \phi_2 \cdot \sin(\Delta\lambda))^2 + (\cos \phi_1 \cdot \sin \phi_2 - \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2 \cdot \cos(\Delta\lambda))^2}}{\sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 + \cos \phi_1 \cdot \cos \phi_2 \cdot \cos(\Delta\lambda)}.$$

ali

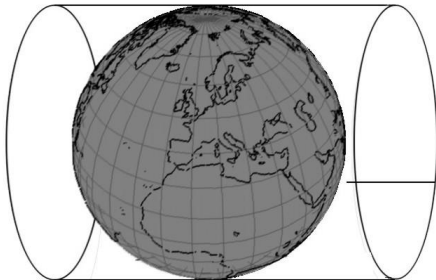
z uporabo vektorske algebre (skalarni produkt, vektorski produkt).

- Uporaba: Google maps, ipd.

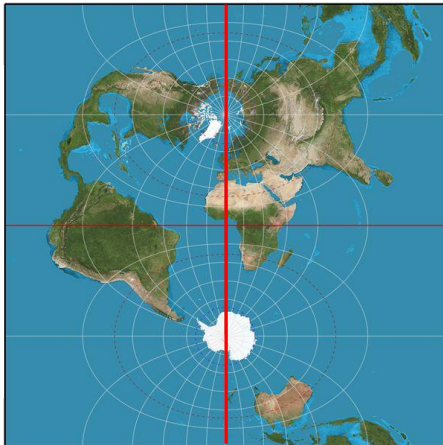


Prečna Mercatorjeva projekcija

- Cilindrična, vodoravna, konformna preslikava



Natančna v območju okoli
srednjega meridiana

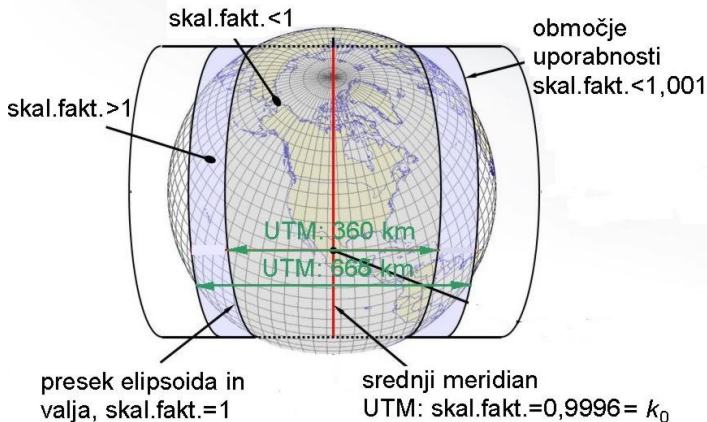


Univerzalna prečna Mercatorjeva projekcija

- Universal Transverse Mercator (UTM).
- Splošno uporabljan sistem (tudi Google Earth).
- Oblika Zemlje povzeta po World Geodetic System (WGS 84) (uporablja ga GPS).
- 60 cilindričnih, sekantnih, vodoravnih, konformnih preslikav.
- Preslikava z WGS 84 direktno v N (*northing*) - E (*easting*) koordinatni prostor.
- Dokaj zahtevna preslikava (vrste, hiperbolične funkcije, ...), glej: https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_Transverse_Mercator_coordinate_system

$$N = f_1(\varphi, \lambda, \lambda_0, a, b, k_0, N_0) , \quad E = f_2(\varphi, \lambda, \lambda_0, a, b, k_0, E_0)$$

- Cilinder seka elipsoid (pretirano na sliki spodaj)



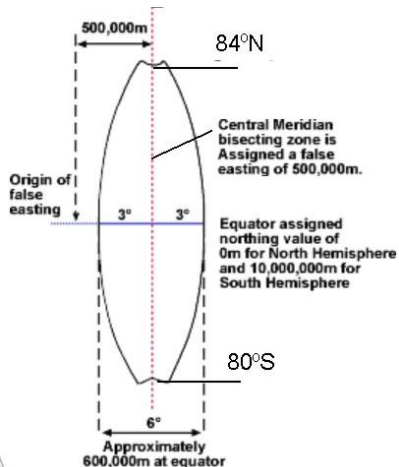
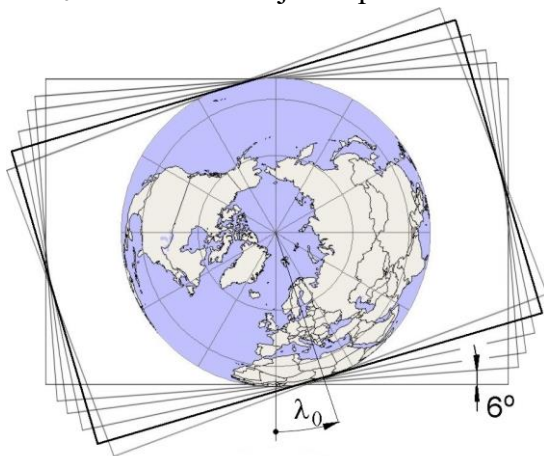
Opomba: k_0 (skalirni faktor) = l (linerni modul)

- 60 sekantnih projekcij po obsegu ekvatorja

$$E_0 = 500 \text{ km},$$

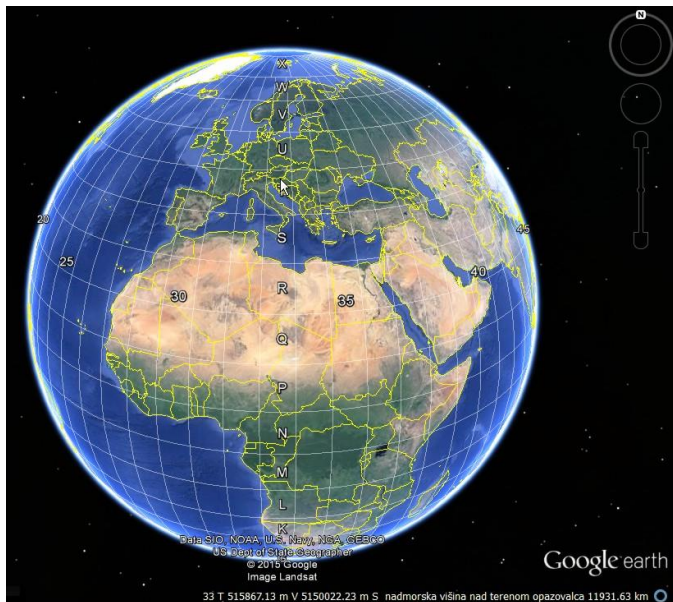
$$N_0 = 0 \text{ km za severno poloblo},$$

$$N_0 = 10000 \text{ km za južno poloblo}.$$



Meridianski pas

- 20 vzporedniških pasov po poldnevniku: od C do X



Gauß-Krügerjeva projekcija

- Krüger 1912, predhodnik UTM sistema.
- Referenčna ploskev je lokalno orientiran Besselov elipsoid (Bessel 1841).
- V uporabi v Sloveniji (iz SRFJ: D48) (tudi v D, A, ex-YU, TR, FIN).
- Pasovi širine 3° .
 - konformna projekcija,
 - srednji poldnevnik je narisane kot premica,
 - največja linearna deformacija 0,0001 (1dm/1km),
 $l = k_0 = 0.9999$,
 - oznake meridijskih pasov: $\lambda_0/3^\circ$, za Slovenijo $15^\circ/3^\circ = 5$.
Primer: Zagorje ob Savi: $x = 5\,110\,000\text{ m}$, $y = 5\,500\,000\text{ m}$



Lega 15°
poldnevnik!



- Primerjava z UTM:
 - največja linearna deformacija je v UTM večja,
 - v naših krajih je razlika med sistemoma v smeri V-Z 325-405 m, v smeri S-J pa 1020-1080 m.
- Zahtevni izračuni pretvorbe med sistemoma.
 - uporaba aplikacij, npr.: <http://www.mkx.si/geoconv/> (jan. 2022) ali <http://www2.arnes.si/~gljsentvid10/krugeoz3.htm> (jan. 2022)

Kartografija v Sloveniji

- Zapuščina 3 držav, integracija v EU in NATO.
- Trenutno stanje:
 - Gauß-Krügerjeva projekcija podrobnih kart do merila 1:250 000,
 - Lambertova konformna konusna projekcija (1: 500 000 in 1:1 000 000). Uporaba tudi v civilnem letalstvu,
 - Mercatorjeva projekcija na pomorskih kartah,
 - UTM sistem natisnjen preko Gauß-Krügerjevih projekcij (tudi NATO).

Literatura

Kartografija, *Tehnička enciklopedija*, 6. svezak, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, Zagreb, 1979.

<http://avis.soe.ucsc.edu/map.html> (jan. 2022)

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_map_projections#pseudocylindrical (jan. 2022)

https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_Transverse_Mercator_coordinate_system (jan. 2022)

https://en.wikipedia.org/wiki/Map_projection (jan. 2022)