IV. HOLOMORFNA APROKSIMACIJA

V tem poglavju se bomo ukvarjali z vprašanji, kdaj lahko holomorfne funkcije na dani množici v $\mathbb{C}$ aproksimiramo, enakomerno na kompaktih, s funkcijami, ki so holomorfne na kaki večji množici.

IV.1. Rungejev izrek – aproksimacija s polinomi

IZREK (Runge) Naj bo K kompaktna množica v $\mathbb{C}$ s povezanim komplementom $\mathbb{C}\setminus K$. Potem lahko vsako funkcijo f, ki je holomorfna na neki odprti okolici množice K, aproksimiramo enakomerno na K s holomorfnimi polinomi.

Natančneje: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P(z)$ holomorfen polinom, tako da je
$$\sup_{z\in K} \left|f(z) - P(z)\right| < \varepsilon .$$

Dokaz. Poglejmo najprej poseben primer, ko je K zaprt krog: $K = \overline{\mathbb{D}(a,r)}$. Recimo, da je f holomorfna na $\mathbb{D}(a,R)$ za nek $R > r$. Tedaj
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = \lim_{n\to\infty} P_n(z),$$

kjer je P_n Taylorjev polinom

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z-a)^k .$$

Vrsta konvergira enakomerno na kompaktih v $D(a,R)$, torej enakomerno na K. S tem je poseben primer dokazan.

Poseben primer: Če je K zaprt krog v $\mathbb{C}$ in je b točka izven K, $(b \in \mathbb{C} \setminus K)$, potem je funkcija $\left.\frac{1}{z-b}\right|_K$ enakomerna limita (na K) holomorfnih polinomov.

Splošen primer: uporabili bomo metodo "potiskanja (izrivanja) polov". Izberemo $\varepsilon > 0$. Naj bo $f(z)$ holomorfna funkcija na odprti množici $U \supset K$. Izberemo odprto množico D z gladkim robom $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup \dots C_m$, $K \subset D$ in $\overline{D} \subset U$. Pri tem so C_j sklenjene gladke Jordanove krivulje. Po Cauchyevi integralni formuli je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \quad ; \quad z \in D .$$

Zaradi enostavnosti argumenta privzemimo, da je ∂D povezan (argument bo veljal tudi v splošnem).
Parametriziramo ∂D:

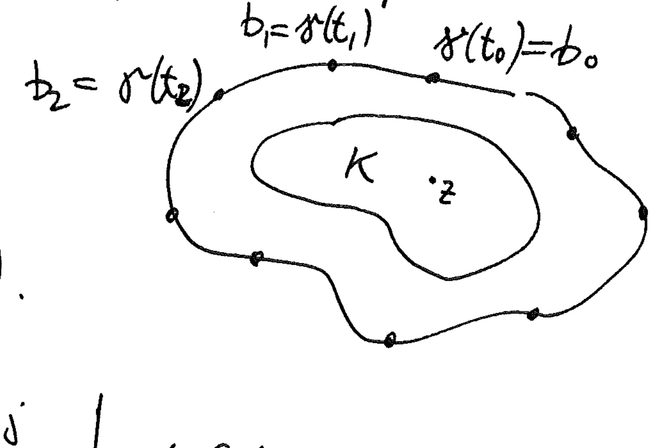
$$\partial D \ni \zeta = \gamma(t), \quad t \in [0,1].$$

Tedaj je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} \cdot \dot\gamma(t)\, dt, \qquad z \in D.$$

Izberemo delitev $t_0 = 0 < t_1 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ intervala $[0,1]$ in aproksimiramo integral z Riemannovo vsoto. Če je delitev dovolj fina, velja

$$\sup_{z\in K} \left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \frac{f(\gamma(t_j)) \cdot \dot\gamma(t_j)}{\gamma(t_j)-z} \right| < \varepsilon/2$$



Označimo $b_j := \gamma(t_j) \in \partial D$

$$A_j := \frac{1}{2\pi i} f(\gamma(t_j)) \cdot \dot\gamma(t_j).$$

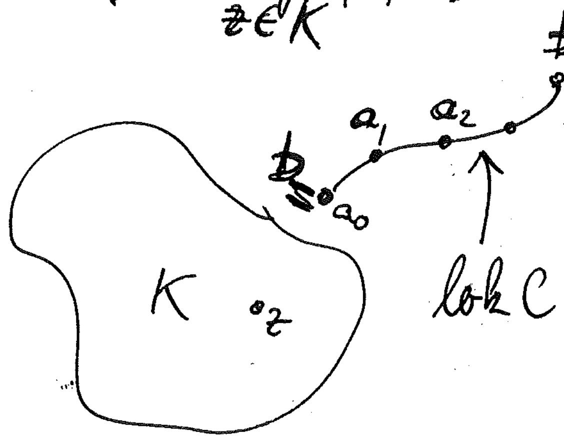
Torej:

$$\sup_{z\in K} \left| f(z) - \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{b_j - z} \right| < \varepsilon/2.$$

Da končamo dokaz, zadošča videti, da lahko za vsako točko $b \in \partial D$ funkcijo $z \to \frac{1}{b-z}$ aproksimiramo poljubno natančno, enakomerno na K, s holomorfnimi polinomi:

Pomožna trditev: Naj bo $K \subset \mathbb{C}$ kompaktna množica s povezanim komplementom. Za vsak $b \in \mathbb{C} \setminus K$ je funkcija $z \to \frac{1}{b-z}$ enakomerna limita na K nekega zaporedja holomorfnih polinomov.

Dokaz. Izberemo lok $C \subset \mathbb{C} \setminus K$, ki povezuje točko b z neko točko b', ki je dovolj oddaljena od K, da velja: $|b'| > \sup_{z \in K} |z|$.



Izberemo točke

$a_0 = b,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_k = b'$

na loku C, tako da velja:

$$|a_j - a_{j-1}| < \operatorname{dist}(C, K); \quad j = 1, \ldots, k.$$

Sedaj:

$$\frac{1}{a_0 - z} = \frac{1}{(a_1 - z) + (a_0 - a_1)} =$$

$$= \frac{1}{a_1 - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a_1 - a_0}{a_1 - z}}$$ razvijemo v geometrijsko vrsto

$$= \frac{1}{a_1 - z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_1 - a_0}{a_1 - z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1 - a_0)^n}{(a_1 - z)^{n+1}}$$

Geometrijska vrsta konvergira enakomerno za $z \in K$, ker je $\sup_{z\in K} \left|\frac{a_1 - a_0}{a_1 - z}\right| < 1$.

Odtod vidimo, da lahko $\frac{1}{a_0 - z}$ aproksimiramo enakomerno na K s polinomi v $\frac{1}{a_1 - z}$.

(Vzamemo končni del vrste na desni).

Isti sklep lahko ponovimo s funkcijo $\frac{1}{a_1 - z}$: aproksimiramo jo s polinomi v $\frac{1}{a_2 - z}$.

Nadaljujemo. Po končno korakih vidimo, da lahko $\frac{1}{a_0 - z}$ aproksimiramo, enakomerno na K, s polinomi v $\frac{1}{a_k - z} = \frac{1}{b' - z}$.

Ker je $K \subset \mathbb{D}(0,R)$ in $b' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(0,R)$, lahko $\frac{1}{b'-z}$ aproksimiramo enakomerno na K s holo. polinomi (glej poseben primer).

S tem je dokaz zaključen.

~~Opomba~~

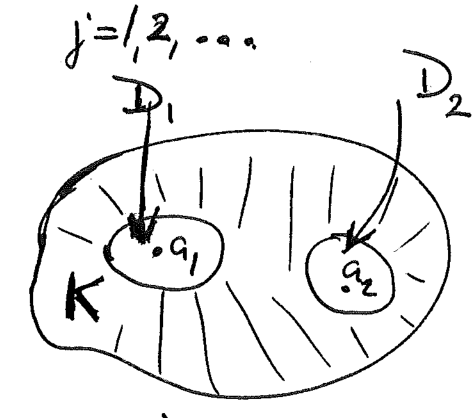
IV. 2. Splošni Rungejev izrek: aproksimacija z racionalnimi funkcijami

IZREK. Naj bo K kompaktna množica v $\mathbb{C}$ in naj bo $\Gamma \subset \mathbb{C}\setminus K$ množica, ki vsebuje vsaj eno točko v vsaki omejeni povezani komponenti $\mathbb{C}\setminus K$.

Potem lahko vsako funkcijo f, ki je holomorfna na neki okolici od K, aproksimiramo enakomerno na K z racionalnimi funkcijami s poli v Γ.

Dokaz. Naj bo $\mathbb{C}\setminus K = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup \ldots$ kjer so D_j povezane komponente $\mathbb{C}\setminus K$ in je D_0 neomejena (ostale D_j, $j=1,2,\ldots\}$ so torej omejene).

Izberemo točko $a_j \in D_j \cap \Gamma$, $j=1,2,\ldots$



Z enakim argumentom kot v §4.1 aproksimiramo D_0 f z linearno kombinacijo funkcij $\frac{1}{z-b}$ s poli v točkah $b \in \mathbb{C}\setminus K$.

Recimo, da leži b v povezani komponenti D_j. Če je $j=0$, to je, $b \in D_0$ = neomejena komponenta, lahko enako kot prej pol izrinemo po neki poti v D_0 dovolj blizu ∞; s tem dobimo enakomerno aproksimacijo funkcije $\frac{1}{z-b}\Big|_K$ s polinomi.

Če pa leži b v kakšni omejeni komponenti D_j $(j=1,2,\ldots)$, potem lahko pol izrinemo v točko a_j; s tem dobimo aproksimacijo funkcije $\frac{1}{z-b}\Big|_K$ s polinomi v $\frac{1}{z-a_j}$, to je, ~~z~~ racionalnimi fn. s polom v a_j. Podrobnosti – glej razdelek 4.1.

S tem je izrek dokazan.

POSLEDICA 1. Denimo, da je $K \subset \Omega \subset \mathbb{C}$, K kompaktna, Ω odprta, tako da $\Omega \setminus K$ ne vsebuje nobene relativno kompaktne povezane komponente.

Potem je vsaka funkcija, ki je holomorfna na neki okolici K, enakomerna limita na K funkcij iz $\mathcal{H}(\Omega)$.

Dokaz. Naj bo $\mathbb{C} \setminus K = D_0 \cup D_1 \cup \ldots$ dekompozicija na povezane komponente.

Za dokaz zadošča videti, da $D_j \not\subset \Omega$ za $j = 1, 2, \ldots$, saj v tem primeru lahko izberemo točko $a_j \in D_j \setminus \Omega$ in aproksimiramo dano funkcijo f enakomerno na K s funkcijami, ki imajo pole v množici $\{a_1, a_2, \ldots\}$.

Če je $D_j \subset \Omega$, potem je D_j hkrati tudi povezana komponenta množice $\Omega \setminus K$; poleg tega ~~predpostavke~~ je $\overline{D_j}$ kompaktna, saj je D_j omejena. To je v protislovju s predpostavko, da $\Omega \setminus K$ nima relativno kompaktnih povezanih komponent.

POSLEDICA 2. Naj bosta $K \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ kot v Posledici 1. Za vsako točko $p \in \Omega \setminus K$ obstaja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, tako da je

$$f(p) = 1 > \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

Dokaz. Množica $K_1 = K \cup \{p\} \subset \Omega$ zadošča isti lastnosti, to je, $\Omega \setminus K_1$ nima relativno kompaktnih povezanih komponent. Zato lahko holo. funkcijo

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z \text{ na okolici } K \\ 1, & z \text{ na okolici točke } p \end{cases}$$

aproksimiramo poljubno dobro s funkcijo $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Nadomestimo f z $\dfrac{f(z)}{f(p)}$, da dosežemo $f(p) = 1$.

IV.3. HOLOMORFNO KONVEKSNE MNOŽICE IN RUNGEJEVI PARI

Definicija. Naj bo K kompaktna množica, vsebovana v odprti množici $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(a) Holomorfna ogrinjača $\widehat{K}_\Omega$ množice K v Ω je

$$\widehat{K}_\Omega = \left\{ p \in \Omega \;\middle|\; |f(p)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)|, \ \forall f \in \mathcal{H}(\Omega) \right\}.$$

(b) K je holomorfno-konveksna v Ω, ali $\mathcal{H}(\Omega)$-konveksna, če je $K = \widehat{K}_\Omega$.

Opažanja:

1° $K \subset \widehat{K}_\Omega$; $\widehat{K}_\Omega$ je zaprta v Ω in omejena.

2° $p \in \Omega \setminus \widehat{K}_\Omega \iff \exists f \in \mathcal{H}(\Omega)$, tako da je

$$|f(p)| > \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

Če pomnožimo f s primerno konstanto, lahko dosežemo

$$|f(p)| > 1 > \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

Če sedaj f nadomestimo z f^N, $N \gg 0$, lahko dosežemo, da je vrednost $|f(p)|$ poljubno velika in $\sup_{z \in K} |f(z)| = \|f\|_K$ poljubno majhna.

3° $\left(\widehat{K}_\Omega\right)^\wedge_\Omega = \widehat{K}_\Omega$. $\quad \Omega = \mathbb{C}: \ \widehat{\widehat{K}} = \widehat{K}$.

To je, $\widehat{K}_\Omega$ je vedno $\mathcal{H}(\Omega)$-konveksna.

<u>Opomba</u>. Če je $\Omega = \mathbb{C}$, pišemo $\widehat{K}_{\mathbb{C}} = \widehat{K}$.
Ta množica se imenuje <u>polinomsko konveksna ogrinjača množice</u> K.

<u>IZREK</u>. Množica $\widehat{K}_\Omega$ je enaka uniji K in vseh relativno kompaktnih povezanih komponent $\Omega \setminus K$.

<u>Dokaz</u>. Denimo, da je $D \subset \Omega \setminus K$ povezana komponenta, katere zaprtje v Ω je kompaktno:
$\overline{D} \cap \Omega$ kompaktno
To je mogoče le, če $\overline{D} \cap \partial\Omega = \emptyset$; torej $\overline{D} \subset \Omega$.
Ker je D povezana komponenta od $\Omega \setminus K$, je
$\partial D \subset \partial\Omega \cup K$; torej $\underline{\partial D \subset K}$.
$\partial D \cap \partial\Omega = \emptyset$
Iz principa maksimuma sledi, da vsaka holomorfna funkcija $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ zadošča

$$\sup_{z \in \overline{D}} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial D} |f(z)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)| .$$

ker je $\partial D \subset K$.

Odtod sledi $D \subset \widehat{K}_\Omega$.

Naj bo K_1 unija K in vseh relativno kompaktnih povezanih komponent $\Omega \setminus K$ (to je, ~~k~~ K dodamo vse "luknje", to so povezane komponente od $\mathbb{C}\setminus K$, ki v celoti ležijo v Ω). Po zgornjem velja: $K_1 \subset \widehat{K}_\Omega$.

Torej je $\Omega \setminus K_1$ unija vseh tistih povezanih komponent od $\Omega \setminus K$, ki niso relativno kompaktne (to je, njihovo zaprtje seka $\partial\Omega$). Zato je $\Omega \setminus K_1$ odprta, torej je K_1 zaprta in (ker je K_1 očitno omejena) kompaktna.

Ker $\Omega \setminus K_1$ ne vsebuje nobene relativno kompaktne povezane komponente (po prejšnjem odstavku), lahko uporabimo Posledico 1:

$\forall p \in \Omega \setminus K_1 \;\; \exists f \in \mathcal{H}(\Omega)$, tako da je $|f(p)| > \sup\limits_{K_1} |f| \geq \sup\limits_{K} |f|$. Torej $p \notin \widehat{K}_\Omega$.

Po drugi strani je $K_1 \subset \widehat{K}_\Omega$ po principu maksimuma (glej zgoraj).

Sledi $\widehat{K}_\Omega = K_1$.

<u>Posledica</u>. Za vsako kompaktno množico K v odprti množici $\Omega \subset \mathbb{C}$ velja
$$\operatorname{dist}(K, \mathbb{C}\setminus\Omega) = \operatorname{dist}(\widehat{K}_\Omega, \mathbb{C}\setminus\Omega).$$

<u>Trditev</u>. Za vsako odprto množico $\Omega \subset \mathbb{C}$ obstaja normalno izčrpanje
$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$$
tako da velja $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$ in
$$\widehat{(K_n)}_\Omega = K_n$$
za vsak $n = 1, 2, \ldots$

<u>Dokaz</u>. Izberemo normalno izčrpanje
$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = \Omega, \quad L_n \subset \operatorname{Int} L_{n+1}.$$
npr., $L_n = \{ z \in \Omega \mid |z| \leq n, \operatorname{dist}(z, \mathbb{C}\setminus\Omega) \geq \frac{1}{n} \}$.

Vzamemo $K_1 = \widehat{(L_1)}_\Omega$. Poiščemo $n_2 > 1$, tako da je $K_1 \subset \operatorname{Int} L_2$.

Vzamemo $K_2 = \widehat{(L_2)}_\Omega$.

Induktivno nadaljujemo.

<u>Posledica</u>. Če je množica $K \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ kompaktna in $\mathcal{H}(\Omega)$-konveksna, potem lahko vsako funkcijo, ki je holomorfna na okolici množice K, ~~ob~~ aproksimiramo enakomerno na K s funkcijami iz $\mathcal{H}(\Omega)$.

<u>Poseben primer</u>: $K = \widehat{K}$ = polinomsko konveksna

$\Rightarrow$ holo funkcije na K so enakomerne limite holomorfnih polinomov.

RUNGEJEVI PARI

4.13

Rungejevi pari domen:

Definicija. Naj bosta $D \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ odprti množici. Množica D je *Rungejeva* v Ω, oz. (D, Ω) je Rungejev par, če je množica

$$\{ f|_D : f \in \mathcal{O}(\Omega)\} \subset \mathcal{O}(D) \text{ gosta v } \mathcal{O}(D).$$

Drugače povedano: $\forall K^{\text{kompakt}} \subset D$, $\forall f \in \mathcal{O}(D)$, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists F \in \mathcal{O}(\Omega), \text{ da je}$$

$$\|F - f\|_K < \varepsilon.$$

IZREK. Naslednje lastnosti so ekvivalentne:

(a) D je Rungejeva v Ω.

(b) $\forall K^{\text{kompakt}} \subset D$ je $\widehat{K}_{\mathcal{O}(D)} = \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$.

(c) $\forall K^{\text{kompakt}} \subset D$ je $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \cap D$ kompakt v D.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b). Naj bo $z_0 \in D \setminus \widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}$.

Tedaj $\exists f \in \mathcal{O}(D)$, $f(z_0) = 1 > \|f\|_K$.

Aproksimirajmo f enakomerno na $K \cup \{z_0\}$ s $F \in \mathcal{O}(\Omega)$;

$|F(z_0)| > \|F\|_K$. Torej $z_0 \notin \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$.

Torej je $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \cap D = \widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}$.

4.13B

Pišimo $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} = \widehat{K}_{\mathcal{O}(D)} \cup L$,

kjer je $L = \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \setminus D$ = kompakt v $\Omega \setminus D$.

Naj bo $\begin{cases} f = 0 & \text{na okolici } \widehat{K}_{\mathcal{O}(D)} \\ f = 1 & \text{na okolici } L. \end{cases}$

Če aproksimiramo f z $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ (Runge!), dobimo

$$|F| > 1/2 \text{ na } L$$
$$|F| < 1/2 \text{ na } K.$$

Torej $L \cap \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} = \emptyset$. Sledi $L = \emptyset$,

zato $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} = \widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) je trivialno.

(c) $\Rightarrow$ (a).

$f \in \mathcal{O}(D)$, $K^{\text{kompakt}} \subset D$.

Naj bo $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} = K_1 \cup L$,

$$K_1 = \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \cap D \quad \text{(kompakt)}$$
$$L = \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \setminus D \quad (\text{kompakt v } \Omega \setminus D).$$

~~Razširimo f~~ $h = \begin{cases} f, & \text{na okolici } K_1; \\ 0, & \text{na okolici } L. \end{cases}$

Aproks. h z $F \in \mathcal{O}(\Omega)$, enakomerno na $K_1 \cup L$.

Tedaj $F|_K \approx f$.

RUNGEJEVI PARI

4.13C

IZREK. Domena $D \subset \mathbb{C}$ je Rungejeva natanko tedaj, ko je enostavno povezana.

Dokaz. Vzemimo, da je D povezana (isti argument velja v splošnem).

Če je D enostavno povezana, obstaja biholomorfizem $\phi : \mathbb{D} \xrightarrow{\cong} D$. Tedaj je $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi\left(\overline{\mathbb{D}(0, 1-\frac{1}{n})}\right)$.
Vsaka množica $K_n = \phi\left(\overline{\mathbb{D}(0,1-\frac{1}{n})}\right)$ ima povezan komplement, torej je $\mathcal{O}(\mathbb{C})$-konveksna.

Zato je D Rungejeva v $\mathbb{C}$.

Obratno: Denimo, da D ni enostavno povezana. Tedaj obstaja Jordanova krivulja $C \subset D$ (homeomorfna slika krožnice), ki ni homotopna 0 v D.

Po Jordan–Schönfliesovemu izreku je $\mathbb{C} \setminus C = U_0 \cup U_1$ unija dveh povezanih komponent. Naj bo U_1 omejena komponenta. Tedaj je $U_1 \subset \widehat{C}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}$ po principu maksimuma. Ker je C homotopna konst. v $\overline{U}_1$, sledi $U_1 \not\subset D$. Torej

$$\widehat{C}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} \not\subset D.$$

Torej D ni Rungejeva v $\mathbb{C}$.

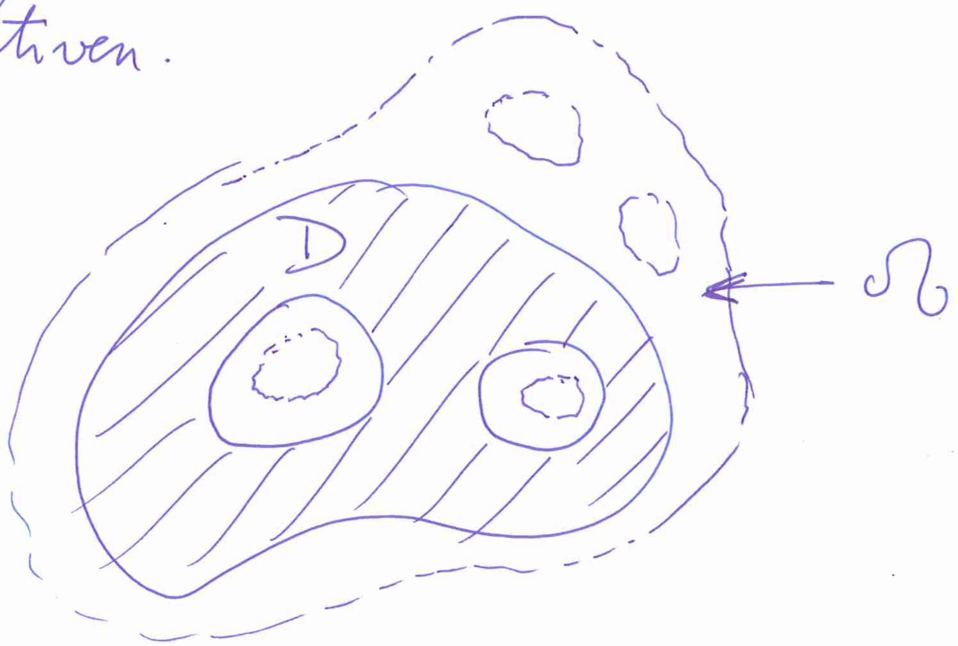
Podobno lahko dokažemo naslednji izrek.

IZREK. Naj bo $D \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ par domen. Tedaj je D Rungejeva v Ω natanko tedaj, ko je homomorfizem

$$\pi_1(D;p) \longrightarrow \pi_1(\Omega,p) \quad (p \in D),$$

induciran z inkluzijo $D \hookrightarrow \Omega$, injektiven.

Primer:



$\pi_1(D) \cong$ prosta grupa na 2 generatorjih

$\pi_1(\Omega) \cong$ prosta grupa na 4 generatorjih.

IV. ~~4.~~ Rešitev $\bar\partial$-enačbe na domenah v $\mathbb{C}$.

IZREK. Naj bo $\Omega \overset{\text{odprta}}{\subset} \mathbb{C}$. Za vsako funkcijo $f \in \mathcal{C}^r(\Omega)$ $(r = 1, 2, \dots, \infty)$ obstaja $u \in \mathcal{C}^r(\Omega)$, ki zadošča

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} = f \quad \text{na } \Omega.$$

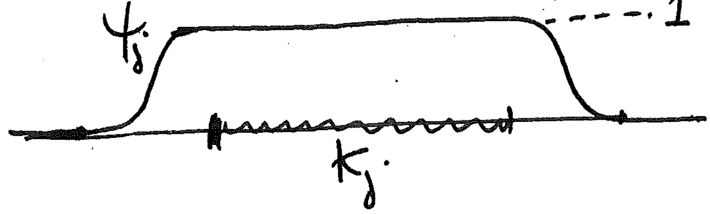
Dokaz. Izberemo zaporedje

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega,$$

tako da je vsaka množica K_j kompaktna in $\mathcal{H}(\Omega)$-konveksna: $K_j = \widehat{(K_j)}_\Omega$. (Glej trditev v §4.3.)

Za vsak j izberemo gladko funkcijo ψ_j s kompaktnim nosilcem na Ω,

$0 \leqq \psi_j \leq 1$, $\psi_j \equiv 1$ v neki okolici K_j.



Postavimo $K_0 = \emptyset$, $\psi_0 = 0$.

Naj bo $\varphi_j = \psi_j - \psi_{j-1}$. Očitno je φ_j gladka, s kompaktnim nosilcem, in $\varphi_j \equiv 0$ v okolici K_{j-1}.
Velja tudi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} (\psi_j - \psi_{j-1}) = \lim_{n \to \infty} \psi_n = 1 .$$

Funkcija $\varphi_j \cdot f$ ima kompakten nosilec, zato obstaja funkcija u_j na $\mathbb{C}$, ki zadošča

$$\frac{\partial u_j}{\partial \bar{z}} = \varphi_j f .$$

Ker je $\varphi_j f \equiv 0$ v okolici množice K_{j-1}, je u_j holomorfna na okolici K_{j-1}.

Ker je K_{j-1} $\mathcal{H}(\Omega)$-konveksna, obstaja po Rungejevem izreku holomorfna funkcija $v_j \in \mathcal{H}(\Omega)$, ki zadošča

$$\| u_j - v_j \|_{K_{j-1}} < 2^{-j} .$$

Vrsta $u = \sum_{j=1}^{\infty} (u_j - v_j)$ konvergira enakomerno na kompaktih v Ω. Velja:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial u_j}{\partial \bar{z}} = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j f = f .$$

Funkcija $\varphi_j f$ ima kompakten nosilec, vsebovan v D. ~~Zato~~ funkcija

$$v_j(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi_j(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z}\, dx\, dy \qquad (\zeta = x+iy)$$

reši enačbo

$$\partial v_j / \partial \bar{z} = \varphi_j f .$$

na K_j: $\quad \partial v_j / \partial \bar{z} = f \quad$ (ker je $\varphi_j|_{K_j} = 1$).

Sedaj induktivno sestavimo rešitev. Izberemo $\varepsilon > 0$.

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - P_2$$

P_2 holomorfen polinom, izbran tako, da je

$$\|u_2 - u_1\|_{K_1} = \|(v_2 - v_1) - P_2\|_{K_1} < \varepsilon \cdot 2^{-1}.$$

Tak P_2 obstaja po Rungejevi izreku, ker je na K_1:

$$\partial(v_2 - v_1)/\partial \bar{z} = f - f = 0.$$

Torej je $(v_2 - v_1)|_{K_1}$ holomorfna na K_1.

Sedaj induktivno nadaljujemo:

$$u_3 = v_3 - P_3 ;$$

$$\|u_3 - u_2\|_{K_2} = \|(v_3 - u_2) - P_3\|_{K_2} < \varepsilon \cdot 2^{-2}.$$

Tak polinom P_3 obstaja, ker je

$$\partial(v_3 - u_2)/\partial\bar{z} = f - f = 0 \text{ na } K_2.$$

- . . . . . .

Zaporedje $u_1, u_2, u_3, \ldots$ konvergira enakomerno na kompaktih v D.

Limita $u = \lim_{n\to\infty} u_n$

reši enačbo $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$ na D.