IV. 5. Mittag-Lefflerjev izrek.

IZREK. Naj bo Ω odprta množica v $\mathbb{C}$, $\{a_n\} \subset \Omega$ diskretna množica točk v Ω in za vsak $j \in \mathbb{N}$ naj bo $P_j(\zeta) = b_{j1}\zeta + b_{j2}\zeta^2 + \ldots$ holomorfen polinom brez konstantnega člena.

Potem obstaja taka meromorfna funkcija f na Ω s poli v točkah $\{a_n\}$, da je $f(z) - P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ holomorfna v neki okolici a_n za $n = 1, 2, \ldots$

Opomba: f je holomorfna na $\Omega \setminus \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ in ima v točki a_n Laurentov razvoj

$$f(z) = \frac{b_{n1}}{z-a_n} + \frac{b_{n2}}{(z-a_n)^2} + \ldots + \frac{b_{n\,m_n}}{(z-a_n)^{m_n}}$$

+ regularni del.

Dokaz: $a_n \in U_n \overset{\text{odprta}}{\subset} \Omega$, $\overline{U_n} \cap \overline{U_m} = \emptyset$ za $n \neq m$. Naj bo $\chi_n \in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp} \chi_n \subset U_n$, $\chi_n = 1$ blizu a_n.

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(z) \cdot P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$$

Obstaja $u \in C^\infty(\Omega)$, $\bar\partial u = \bar\partial g$. Vzamemo $f = g - u$.

Opomba. V zgornjem dokazu je

$$\frac{\partial g}{\partial \bar z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \chi_n}{\partial \bar z} \cdot P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$$

Nosilec funkcije $\partial \chi_n / \partial \bar z$ je kompakten in vsebovan v $U_n \setminus \{a_n\}$; izven unije teh nosilcev funkcijo razširimo z 0. Dobljena funkcija $\partial g / \partial \bar z$ je gladka na D, torej dostaja rešitev enačbe $\partial u / \partial \bar z = \partial g / \partial \bar z$.

Funkcija $f = g - u$ je holomorfna na $D \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\}$, v neki okolici točke a_n pa je u holomorfna, zato ima f v točki a_n ~~oti~~ glavni del enak $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$.

Klasičen dokaz v primeru $D = \mathbb{C}$:

Rešitev poiščemo v obliki vrste (Mittag-Lefflerjev razvoj)

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - Q_n(z)\right),$$

kjer so Q_n polinomi, izbrani tako, da vrsta konvergira enakomerno na kompaktih v $\mathbb{C}$.

Take polinome najdemo s pomočjo Rungejevega izreka. $\mathbb{C}$ lahko izčrpamo kot s krogi.

4.17 A

<u>Primer</u> $\int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\,dt = \int_{t=0}^{t=1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \cdot t^{z-1}\,dt$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \int_0^1 t^{n+z-1}\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{n+z}$$

Meromorfna funkcija s poli v točkah $0, -1, -2, \ldots$.

$\int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt = f(z) =$ holomorfna funkcija, saj integral konvergira absolutno in lokalno enakomerno za $\forall z \in \mathbb{C}$.

Torej je:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt = \underbrace{f(z)}_{\text{hol.}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{n+z}$$

razvoj Γ-funkcije v Mittag-Lefflerjevo vrsto.

PRIMER.

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-(n\pi)^2}.$$

Dokaz. Oglejmo si funkcijo

$$f(z) = \frac{\cot z}{z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Naj bo ~~$\gamma_n = \{z\in\mathbb{C} \mid |z| = n\pi + \frac{\pi}{2}\}$, $n = 1, 2, \ldots$~~

$$\begin{cases} \gamma_n = \partial D_n, \\ D_n = \{x+iy \mid |x| \le (n+\tfrac{1}{2})\pi,\ |y| \le n\} \text{ kvadrat} \end{cases}$$

$$\frac{\cos z}{\sin z} = i\cdot\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = i\cdot\frac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}$$

Če je $|y| = n$, je $|\cot z| \le \dfrac{e^{-n}+e^{n}}{-e^{-n}+e^{n}} \sim 1.$

Če je $|x| = (n+\frac{1}{2})\pi$, je $e^{ix} = \pm i$.

Pri $x = (n+1/2)\pi$: $\cot z = i\cdot\dfrac{i(e^{-y}-e^{y})}{i(e^{-y}+e^{y})}$

ta izraz je enakomerno omejen za vse $y\in\mathbb{R}$.

Podobno pri $x = -(n+1/2)\pi$.

Torej $\quad |\cot z| \leq M, \quad \forall z \in \gamma_n,$

kjer je M absolutna konstanta (neodvisna od n).

Sledi: $$\oint_{\gamma_n} \Big|\underbrace{\frac{\cot z}{z}}_{f(z)}\Big| \cdot \frac{|dz|}{|z|} \xrightarrow{\leq C/n} 0 \quad (n \to \infty) \qquad (*)$$

Oglejmo si integral $\qquad$ izrek o ostankih.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{t \in \gamma_n} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \operatorname{Res}\left(\frac{f(t)}{t-z}; t = z\right) + \sum' \operatorname{Res}\left(\frac{f(t)}{t-z}, t = a_k\right)$$

Druga vsota je po vseh k, za katere je $a_k \in D_k$.

Ko gre $n \to +\infty$, gre integral na levi proti 0, kar sledi iz $(*)$.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(t)}{t-z}; t = z\right) = f(z), \quad \text{če } z \text{ ni pol } f.$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(t)}{t-z}, t = a_k\right) = -P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$$

kjer je $P_k\left(\frac{1}{t-a_k}\right)$ glavni del od $f(t)$ v točki $t = a_k$. (Glej naslednjo stran).

Sledi: $$f(z) = \sum_k' P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right).$$

V danem primeru je

$$\frac{\operatorname{cotan} z}{z} = \frac{1}{z^2} + \text{regularni del (pri } z=0).$$

$$\frac{\operatorname{cotan} z}{z} = \frac{1}{n\pi \cdot (z-n\pi)} \; ; \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Sledi

$$\frac{\operatorname{cotan} z}{z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n\pi (z-n\pi)} .$$

Lema: Če je $f(t) = P\left(\frac{1}{t-a}\right)$ + regularni del v $t=a$, je

$$\operatorname{Res}_{t=a} \frac{f(t)}{t-z} = -P\left(\frac{1}{z-a}\right). \quad (z \neq a).$$

Dokaz:

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-a+a-z} =$$

$$= \frac{1}{a-z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t-a}{a-z}}$$

$$= -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-a)^j}{(z-a)^{j+1}} .$$

$$P\left(\frac{1}{t-a}\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(t-a)^k}$$

$$\operatorname{Res}_{t=a} \frac{1}{t-z} \cdot P\left(\frac{1}{t-a}\right) = -\sum \frac{c_k}{(z-a)^k} .$$

PRIMER. Weierstrassova $\wp$-funkcija, eliptične funkcije.

Naj bosta $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$ kompleksni števili, tako da je $\mathrm{Re}\,(\omega_1/\omega_2) \neq 0$. Tedaj je

$$\Gamma = \{ n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \;:\; n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \} \subset \mathbb{C}$$

diskretna ~~p~~ abelova podgrupa, izomorfna $\mathbb{Z}^2$ (to je, prosta abelova grupa z dvema generatorjema).

Γ deluje na $\mathbb{C}$ povsem nezvezno in brez negibnih točk kot grupa translacij $\{ z \to z+\omega \;:\; \omega \in \Gamma \}$.

Kvocient $\mathbb{C}/\Gamma = \mathbb{T}$ je kompleksni torus (Riemannova ploskev roda 1), prirejen Γ.

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, hook] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{C}/\Gamma = \mathbb{T} \end{tikzcd}$$

Meromorfna funkcija f na $\mathbb{C}$ je Γ-invariantna, če ~~je~~ zadošča:

$$\boxed{f(z+\omega) = f(z), \quad \forall \omega \in \Gamma,\ z \in \mathbb{C}.}$$

Očitno vsaka Γ-invariantna funkcija na $\mathbb{C}$ določa meromorfno funkcijo na $\mathbb{T}$; obratno, meromorfna funkcija g na $\mathbb{T}$ določa Γ-invariantno mero. fn. $f = g \circ \pi$ na $\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ \mathbb{T} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

ICTP
www.ictp.it

El 2

Konstruirati želimo meromorfne funkcije. Iz topoloških razlogov (Riemann-Hurwitzova formula) ima vsaka holomorfna preslikava $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ stopnjo ≥ 2.

Torej ima smisel iskati funkcijo z enim polom stopnje 2.

$$\boxed{\wp(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega\in\Gamma \\ \omega\neq 0}}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \qquad \text{Weierstrassova } \wp\text{-funkcija}}$$

Vrsta konvergira enakomerno na kompaktih:

Naj bo $|z| \leq R$ in $|\omega| \geq 2R$. Tedaj:

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| = \left|\frac{z^2-2z\omega}{(z-\omega)^2\omega^2}\right| \leq 4\cdot\frac{R^2+2R|\omega|}{|\omega|^4} \leq C\cdot\frac{1}{|\omega|^3}.$$

Lahko je preveriti, da $\sum_{0\neq\omega\in\Gamma} \frac{1}{|\omega|^3} < +\infty$.

Trdimo, da je $\wp$ Γ-periodična. Odvajajmo:

$$\boxed{\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - \sum_{0\neq\omega\in\Gamma} \frac{2}{(z-\omega)^3} = -2\cdot\sum_{\omega\in\Gamma}\frac{1}{(z-\omega)^3}}$$

Ta funkcija je očitno Γ-periodična. Odtod sledi, da imata funkciji $\begin{cases} f(z+\omega_1)-f(z) \\ f(z+\omega_2)-f(z) \end{cases}$

odvod 0, zato sta konstantni.

Ker je $f(z)$ očitno <u>soda</u> $(f(z) = f(-z))$, dobimo:

$$f(z+\omega_1) - f(z) \equiv C_1; \quad z = -\frac{\omega_1}{2} \quad \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$f(z+\omega_2) - f(z) \equiv C_2; \quad z = -\frac{\omega_2}{2} \quad \Rightarrow C_2 = 0.$$

Odtod sledi: $f(z+\omega) - f(z) \equiv 0, \quad \forall \omega \in \Gamma.$

<u>Diferencialna enačba za $\wp(z) = w$:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \wp'(z)^2 &= 4\wp(z)^3 - g_2 \cdot \wp(z) - g_3 \\ g_2 &= 60 \cdot G_2 = 60 \cdot \sum_{\omega\in\Gamma}' \frac{1}{\omega^4} \\ g_3 &= 140 \cdot G_3 = 140 \cdot \sum_{\omega\in\Gamma}' \frac{1}{\omega^6} \end{aligned}}$$

Preslikava $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z)) = (x(z), y(z)) \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$ preslika $\mathbb{T}$ holomorfno na kompleksno (eliptično) krivuljo v $\mathbb{CP}^2$ z enačbo

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

oziroma, v homogenih koordinatah $[\zeta : x : y]$ na $\mathbb{CP}^2$:

$$y^2 \cdot \zeta = 4x^3 - g_2 x \zeta^2 - g_3 \cdot \zeta^3.$$

Glej npr. <u>L. Ahlfors</u>: Complex Analysis.

I. Cousinov problem

Mittag-Lefflerjev izrek neravno vodi v naslednjo splošnejšo formulacijo, ki je pomembna v višjih dimenzijah in ki vodi k Cousinovim problemom:

(*) Dano je odprto pokritje $\{U_j\}$ dane množice D in meromorfne funkcije m_j na U_j, tako da je za vsak par indeksov i,j razlika

$$f_{ij} = m_i\big|_{U_{ij}} - m_j\big|_{U_{ij}}$$

holomorfna na $U_{ij} = U_i \cap U_j$.

Poišči meromorfno funkcijo m na $D = \bigcup_j U_j$, tako da je razlika

$$m_i - m\big|_{U_i} =: f_i$$

holomorfna na U_i za vsak i.

Kolekcijo meromorfnih funkcij $\{m_j\}$, ki zadošča zgornjemu pogoju, se imenuje Mittag-Lefflerjeva distribucija na D; ta podaja glavne dele iskane meromorfne funkcije m.

Opazimo, da kolekcija holomorfnih funkcij f_{ij} na U_{ij} zadošča naslednjim pogojem:

(a) $f_{ii} = 0$

(b) $f_{ij} + f_{ji} = 0 \quad (f_{ji} = - f_{ij})$

(c) $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$ na $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$.

Taka kolekcija se imenuje <u>1-kocikel</u> <u>s holomorfnimi vrednostmi</u> <u>na pokritju</u> $\mathcal{U} = \{U_j\}$.

<u>I. Cousinov problem</u>: za dani 1-kocikel f_{ij} poišči tako kolekcijo holomorfnih funkcij $f_j : U_j \to \mathbb{C}$, da velja

$$f_{ij} = f_i \big|_{U_{ij}} - f_j \big|_{U_{ij}} \quad ; \forall i,j.$$

<u>Rešitev I.C.P.</u> $\Longrightarrow$ <u>rešitev Mittag-Lefflerjevega problema</u>.

$$m_i - m_j = f_{ij} = f_i - f_j \quad (\text{na } U_{ij})$$

meromorfne $\qquad\qquad$ holomorfne

$\Longrightarrow \quad m_i - f_i = m_j - f_j$ na U_{ij}

$\Longrightarrow$ Kolekcija $\{m_j - f_j\}$ definira meromorfno funkcijo m na D; $m = m_j - f_j$ na U_j.

$f_j = m_j - m$ = holomorfna, $\forall j$.

Rešitev I. Cousinovega problema s pomočjo $\bar\partial$-enačbe:

1. korak: poiščemo gladke funkcije $h_j : U_j \to \mathbb{C}$, ki zadoščajo
$$h_i - h_j = f_{ij} \quad \text{na } U_{ij}.$$
Izberemo gladko particijo enote, podrejeno pokritju $\{U_j\}$:
$$\begin{cases} \chi_j : \mathbb{C} \to [0,1], \\ \operatorname{supp} \chi_j \subset U_j \\ 1 = \sum_j \chi_j \quad \text{na } \bigcup_j U_j = D. \end{cases}$$
Definiramo:
$$h_i = \sum_{k \neq i} \chi_k \cdot f_{ik} \quad \text{na } U_i.$$
(Opomba: člen $\chi_k \cdot f_{ik}$ razširimo z 0 na $U_i \setminus U_k$.)

Podobno: $h_j = \sum_{k \neq j} \chi_k f_{jk}$ na U_j.

Razlika:
$$h_i - h_j = \sum_{k \neq i,j} \chi_k \cdot (f_{ik} - f_{jk}) + \chi_j f_{ij} - \chi_i f_{ji}$$
$$= \sum_{k \neq i,j} \chi_k f_{ij} + \chi_j f_{ij} + \chi_i f_{ij} = f_{ij}$$
(Uporabili smo kocikelni pogoj $f_{ik} - f_{jk} = f_{ij}$ in $f_{ji} = -f_{ij}$ ter $\sum_k \chi_k = 1$.)

<u>2. korak</u>: Gladko rešitev popravimo do holomorfne rešitve:

$$h_i - h_j = f_{ij} \quad \text{holomorfna na } U_{ij}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h_i}{\partial \bar z} - \frac{\partial h_j}{\partial \bar z} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar z} = 0.$$

Torej kolekcija $\{\partial h_j / \partial \bar z\}$ definira gladko funkcijo g na D.

Rešimo enačbo $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = g$ na D.

Definiramo nove funkcije

$$f_j = h_j - u|_{V_j}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar z} = \frac{\partial h_j}{\partial \bar z} - \frac{\partial u}{\partial \bar z}$$

$$= g - \frac{\partial u}{\partial \bar z}$$

$$= 0.$$

Torej je $\{f_j\}$ kolekcija holomorfnih funkcij, ki zadošča pogoju

$$f_i - f_j = (h_i - u) - (h_j - u)$$

$$= h_i - h_j$$

$$= f_{ij}.$$

Kohomološki pristop – I. Cousinov problem

Kratko eksaktno zaporedje snopov:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{O} \longrightarrow 0$$

snop zarodkov glavnih delov mero fn.

Mittag-Lefflerjev izrek pove, da lahko vsak prerez snopa $\mathcal{M}/\mathcal{O}$ dvignemo do prereza snopa $\mathcal{M}$, to je; do meromorfne funkcije.

$$0 \to \underset{\mathcal{O}(\Omega)}{\overset{\shortparallel}{H^0(\Omega,\mathcal{O})}} \longrightarrow \underset{\mathcal{M}(\Omega)}{\overset{\shortparallel}{H^0(\Omega,\mathcal{M})}} \longrightarrow H^0(\Omega,\mathcal{M}/\mathcal{O}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(\Omega,\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\Omega,\mathcal{M}) = 0$$

Drugo kratko eksaktno zaporedje:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{C}^\infty_{(0,1)} \longrightarrow 0$$

$$0 \to \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{C}^\infty_{0,1}(\Omega) \to$$

$$\longrightarrow H^1(\Omega,\mathcal{O}) \to H^1(\Omega,\mathcal{C}^\infty) = 0.$$

Sledi:

$$H^1(\Omega,\mathcal{O}) = \frac{\mathcal{C}^\infty_{0,1}(\Omega)}{\bar\partial\left(\mathcal{C}^\infty(\Omega)\right)}$$

$\boxed{\text{OPOMBA}}$ Za osnove teorije snopov in kohomologije s koeficienti v snopu, glej zapiske za predmet Riemannove ploskve.