IV. 7. Weierstrassov izrek

IZREK. Naj bo $\{a_j\}$ diskretna množica točk v domeni $D \subset \mathbb{C}$ in $m_j \in \mathbb{Z}$ za vsak $j \in \mathbb{N}$. Obstaja meromorfna funkcija f na D (holomorfna, če so vsi $m_j \geq 0$), ki je holomorfna in neničelna na $D \setminus \{a_j\}$, tako da v neki okolici $V_j \ni a_j$ velja

$$f(z) = (z - a_j)^{m_j} f_j(z)$$

kjer je $f_j \neq 0$ neničelna holomorfna funkcija na V_j.

Opomba. V točkah a_j, za katere je $m_j > 0$, ima f ničlo reda m_j.

V točki a_j, za katero je $m_j < 0$, ima f pol reda $-m_j = |m_j|$.

Torej lahko predpišemo lokacijo ničel in polov meromorfne funkcije (holomorfne, v kolikor ni polov) kot poljubno diskretno množico v D. Če je le končno točk, je rešitev

$$f(z) = \prod_j (z - a_j)^{m_j}.$$

V splošnem se pojavi problem konvergence produkta.

Za klasični dokaz Weierstrassovega izreka na $D = \mathbb{C}$ (K. Weierstrass) potrebujemo nekaj dejstev o konvergenci produktov.

<u>Definicija</u>. Če zaporedje števil

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+c_k) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

konvergira k nekemu številu $p \in \mathbb{C}$, je p <u>produkt</u> števil $1+c_k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$p = \prod_{k=1}^{\infty}(1+c_k)$$

<u>Opazimo</u>:

1° Če je vsaj eno od števil $1+c_k = 0$, potem je $p = 0$.

2° Če produkti konvergirajo k neničelnemu številu $p \neq 0$, potem velja

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0.$$

<u>Dokaz</u>: Če sta p_n in p_{n+1} blizu $p \neq 0$, je

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + c_{n+1}$$ blizu 1, torej je $c_{n+1} \approx 0$.

Opazujmo sedaj produkte, ki zadoščajo pogoju:

$$\mathrm{Re}\, c_k > -1 \iff \mathrm{Re}\,(1+c_k) > 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\log p_n = \log \prod_{k=1}^{n}(1+c_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \log(1+c_k)$$

Če je c blizu 0, je $\log(1+c)$ primerljiv s c:

$$\log(1+c) - c = -\frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} \pm \ldots = O(c^2).$$

na krogu $|c| \leq 1/2$ velja

$$\frac{1}{N}|c| \leq |\log(1+c)| \leq N \cdot |c|$$

za nek $N > 0$. Odtod sledi:

Trditev: Naj bo $\operatorname{Re} c_n > -1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.
Naslednji trditvi sta ekvivalentni:

(a) Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1+c_k)$ konvergira absolutno

(b) vrsta ~~$\sum \log$~~ $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konverg. absolutno.

Če to velja, pravimo, da produkt

$$p = \prod_{k=1}^{\infty}(1+c_k)$$

konvergira absolutno; tedaj je $p \neq 0$.

Če je $c_k = c_k(z)$ funkcija na neki množici K, potem na enak način vidimo, da vrsti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + c_k(z)\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k(z)$$

konvergirata absolutno in enakomerno na K obe hkrati.

V tem primeru produkt

$$P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + c_k(z)\right)$$

konvergira absolutno in enakomerno na K.

Če je za vsak k funkcija c_k zvezna (ali holomorfna) na D in če produkt konvergira absolutno in enakomerno na kompaktih v D, tedaj je $P(z)$ spet zvezna (oziroma holomorfna) funkcija na D.

Kot vedno, končno mnogo členov ne spremeni konvergence produkta.

Klasični dokaz Weierstrassovega izreka za $D = \mathbb{C}$.

Ogledamo si identiteto

$$1 = (1-z)e^{-\log(1-z)}$$

$$= (1-z)\cdot e^{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots} \; ; \quad |z| < 1.$$

Za fiksen $p \in \mathbb{N}$ pišemo

$$G_p(z) = (1-z)e^{z + \dots + \frac{z^p}{p}} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

<u>Lema</u>: $\left|G_p(z) - 1\right| \leq |z|^{p+1} \quad (|z| \leq 1;\ p = 0, 1, 2, \dots)$

<u>Dokaz</u>. $p=0$: $G_0(z) = 1 - z$, $|G_0(z) - 1| = |z|$.

Naj bo sedaj $p > 0$. $G_p(0) = 1$.

$$G_p(z) = 1 + \sum_{k \geq 1} a_k z^k \quad (z \in \mathbb{C}).$$

$$G_p'(z) = \sum_{k \geq 1} k a_k z^{k-1} = -e^{z + \dots + \frac{z^p}{p}} + \underbrace{(1-z)(1 + z + \dots + z^{p-1})}_{1 - z^p} e^{z + \dots}$$

$$= -z^p e^{z + \dots + z^p/p}$$

<u>Sledi</u>: $\begin{cases} a_1 = \dots = a_p = 0; \\ a_k \leq 0 \text{ za } k = p+1, p+2, \dots \end{cases}$ $\qquad G_p(z) = \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k + 1.$

Torej $|G_p(z) - 1| = \left|\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k\right| \leq |z|^{p+1} \cdot \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k|$.

Toda: $1 = |\underbrace{G_p(1)}_{=0} - 1| = \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k|$ (ker so $a_k \leq 0$).

Sledi lema.

Denimo sedaj, da je $a_n \in \mathbb{C}$ diskretno zaporedje;

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty ; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = 0$$

Izberemo števila $p_n \in \mathbb{N}$, tako da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < +\infty, \ \forall r>0. \qquad (*)$$

(Če je $0 \in \{a_n\}$, ga izpustimo.)

(Tedaj velja $\sum_n \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < +\infty, \ \forall r \in \mathbb{R}_+$).

Ogledamo si produkt

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} G_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1-\frac{z}{a_n}\right) \cdot e^{\frac{z}{a_n} + \dots + \left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}}}_{G_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)}$$

Ker je $\left|G_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) - 1\right| \leq \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1} = \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$

za vse dovolj velike n (da je $|z| \leq |a_n|$), sledi iz Leme in $(*)$, da produkt konvergira enakomerno na kompaktih v $\mathbb{C}$.

Torej je $f(z)$ cela funkcija z ničlami $z = a_n$. (Lahko so s ponavljanjem). Da dobimo še pole, vzamemo $f(z) = g(z)/h(z)$.

Weierstrassov faktorizacijski izrek za cele funkcije:

Naj bo f cela funkcija in $\{a_n\}$ zaporedje njenih ničel, šteto z večkratnostmi; $a_n \neq 0$. Denimo, da je $z=0$ ničla stopnje $m \geq 0$.

Tedaj je

$$f(z) = z^m \cdot e^{g(z)} \cdot \prod_n G_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

kjer je g cela funkcija in je $p_n \in \mathbb{Z}_+$ zaporedje števil, izbranih tako da velja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < +\infty, \quad \forall r > 0.$$

PRIMER. Konstruiraj celo funkcijo z ničlami $n \in \mathbb{Z}$ $(0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

Rešitev:
$$f(z) = z \cdot \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

$$\left(p_n = 1 \ \forall n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty . \right)$$

Če združimo člena $\pm n$, dobimo

$$f(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

~~OPOMBA. Če za nek p velja $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \infty$, tedaj $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p+1} < +\infty, \forall r > 0$~~

~~Vsekakor OK za $p_n = n$ (korenski test!).~~

Opomba 1. Konvergenčni pogoj

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < +\infty, \qquad \forall r>0$$

vselej velja za $p_n+1 = n$. To sledi iz korenskega testa:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^n} = \frac{r}{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (\text{ker } |a_n|\to+\infty)$$

Opomba 2: Če za nek p (neodvisen od n) velja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{p+1}} < +\infty,$$

tedaj velja $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p+1} < +\infty$ za $\forall r>0$.

Dokaz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p+1} = r^{p+1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{p+1}} < +\infty.$$

Dokaz za splošno domeno $D \subset \mathbb{C}$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{redukcija na topološki problem ter} \\ \text{rešitev } \bar\partial\text{-enačbe:} \end{array} \right\}$

$\boxed{\text{Lema}}$ Obstaja gladka funkcija g na $D \setminus \{a_j\}$ ki je enaka $(z - z_j)^{m_j}$ na neki okolici točke a_j in ki nima ničel na $D \setminus \{a_j\}$.

Privzemimo, da lema velja. Rešitev iščemo z nastavkom
$$f = g \cdot e^u .$$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar z} = e^u \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \bar z} + g \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar z} \right)$$
$$\Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial \bar z} = - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar z} =: h$$

Opazimo, da je $\frac{\partial g}{\partial \bar z} = 0$ na neki punktirani okolici točke a_j, funkcija $1/g$ pa je gladka na $D \setminus \{a_j\}$. Torej je h gladka funkcija na D, ki je enaka 0 v neki okolici a_j, $\forall j$.

Zato obstaja rešitev enačbe $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = h$.

Pripadajoča funkcija $f = g \cdot e^u$ reši problem.

Na neki okolici a_j je $\partial u / \partial \bar z = 0$, torej je u holomorfna na okolici a_j; $f_j := e^u$,
$$f = (z - a_j)^{m_j} \cdot f_j \quad \text{na okolici } a_j .$$

<u>Skica dokaza leme za primer</u> $\underline{D = \mathbb{C}}$.

$$\rho(z) := |z - z_0|^2.$$

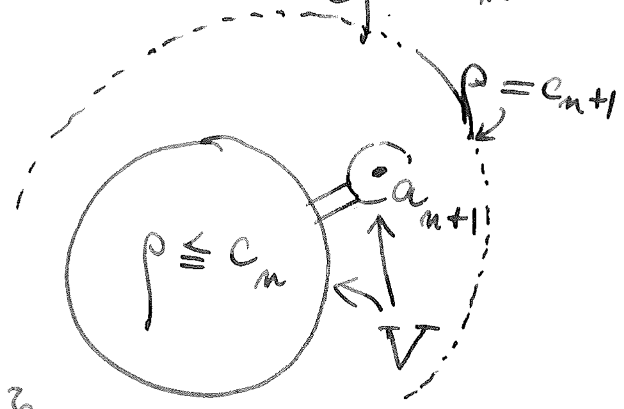
Točko z_0 lahko izberemo tako, da velja

$$0 < \rho(a_1) < \rho(a_2) < \rho(a_3) \dots$$

za primerno preureditev točk danega zaporedja.
Izberemo števila

$$0 < c_1 < \rho(a_1) < c_2 < \rho(a_2) < c_3 < \rho(a_3) < \dots$$

<u>Indukcija</u>: predpostavimo, da smo našli gladko funkcijo $g = g_n$ na okolici diska $\{\rho \leq c_n\}$ z zahtevanimi lastnostmi.



Poiščemo rešitev $\tilde{g}_{n+1}$ na okolici V domene na sliki, ki vsebuje okolico od $\{\rho \leq c_n\}$, okolico točke a_{n+1} ter "most" med njima.

Sedaj obstaja difeomorfizem $\varphi : \{\rho \leq c_{n+1}\} \longrightarrow V$, ki je enak identiteti na $\{\rho \leq c_n\} \cup \{\text{okolica od } a_{n+1}\}$. Vzamemo

$$g_{n+1} = \tilde{g}_{n+1} \circ \varphi .$$

Zaporedje g_n je stacionarno in konvergira k rešitvi $g = \lim_{n \to \infty} g_n$.

Posledica Weierstrassovega izreka je tudi naslednji interpolacijski izrek.

IZREK. Naj bo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diskretna množica v domeni $D\subset\mathbb{C}$. Za poljubno zaporedje kompleksnih števil $c_n\in\mathbb{C}$ $(n\in\mathbb{N})$ obstaja $f\in\mathcal{O}(D)$, ki zadošča

$$(*) \qquad f(a_n)=c_n, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Dokaz. Naj bo $g\in\mathcal{C}^\infty(D)$ gladka funkcija, ki je enaka c_n na nekem krogu $\mathbb{D}(a_n,r_n)\subset D$. Polmere $r_n>0$ izberemo dovolj majhne, da so ti diski paroma disjunktni.

Naj bo $h\in\mathcal{O}(D)$ funkcija z ničelno množico $\{h=0\}=\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Rešitev iščemo z nastavkom

$$f=g+u\cdot h$$

kjer funkcija $u\in\mathcal{C}^\infty(D)$ zadošča enačbi:

$$0=\overline{\partial}f=\overline{\partial}g+h\cdot\overline{\partial}u$$

$$\Longleftrightarrow\quad \overline{\partial}u=-\frac{\overline{\partial}g}{h} \quad \text{na } D.$$

Ker je $\overline{\partial}g=0$ na $\mathbb{D}(a_n,r_n)$, $\forall n$, in je $h\neq 0$ izven točk a_n, je $-\overline{\partial}g/h\in\mathcal{C}^\infty(D)$. Torej rešitev u obstaja.

Očitno f zadošča pogoju $(*)$.

SUBHARMONIČNE FUNKCIJE IZČRPANJA IN DEFINICIJSKE FUNKCIJE NA DOMENAH V $\mathbb{C}$

Za dokaz leme bomo konstruirali ~~s~~trogo subharmonično funkcijo izčrpanja $\rho : D \to \mathbb{R}$ na vsaki domeni $D \subset \mathbb{C}$.

Nato bomo s pomočjo Morsejeve teorije analizirali topološko strukturo podnivojnic $\{\rho \leq c\} \subset D$ ter njihovo spremembo pri prehodu kritičnih vrednosti funkcije ρ.

Videli bomo, da ~~[illegible]~~ je vsaka domena v $\mathbb{C}$ homotopno ekvivalentna šopu krožnic.

<u>IZREK</u>. Za vsako domeno $\Omega \subset \mathbb{C}$ obstaja gladka strogo subharmonična funkcija izčrpanja $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$; to je,

$$\Delta \rho > 0 \text{ na } \Omega$$

in

$$\{\rho < c\} \subset\subset \Omega, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

(relativno kompaktna)

<u>Dokaz</u>. Izberemo normalno izčrpanje

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset \bigcup_1^\infty K_j = \Omega,$$

$$K_j \subset \mathring{K}_{j+1} \text{ in } \widehat{K}_j = K_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

<u>Lema</u>. Če je $K = \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ in $p \in \Omega \setminus K$, obstaja subharmonična funkcija $v \geq 0$, ki je enaka 0 na neki okolici množice K in zadošča $(\Delta v)(p) > 0$.

<u>Dokaz</u>. Izberemo $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f(p) = 1 > \|f\|_K$.

~~Lahko~~ Lahko vzamemo, da $f'(p) \neq 0$.

Funkcija $|f|^2$ je subharmonična:

$$\Delta |f|^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (f \cdot \bar{f}) = 4 |f'(z)|^2.$$

Torej je $(\Delta |f|^2)(p) > 0$, če je $f'(p) \neq 0$.

Izberimo $0 < c < 1$ in okolico $U \supset K$, tako da je $|f|^2 < 1$ na U.

Naj bo $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ naraščajoča konveksna fn, tako da je $h(t) = 0$ za $t \leq c$. Tedaj funkcija $h(|f|^2) =: v$ zadošča lemi.

Velja namreč:

$$\boxed{\Delta(h\circ v) = (h''\circ v)\cdot|\nabla v|^2 + (h'\circ v)\cdot\Delta v}$$

Če je v subharmonična ($\Delta v \geq 0$) in je h naraščajoča ($h' \geq 0$) ter konveksna ($h'' \geq 0$), je torej $\Delta(h\circ v) \geqq 0$, torej $h\circ v$ subharmonična.

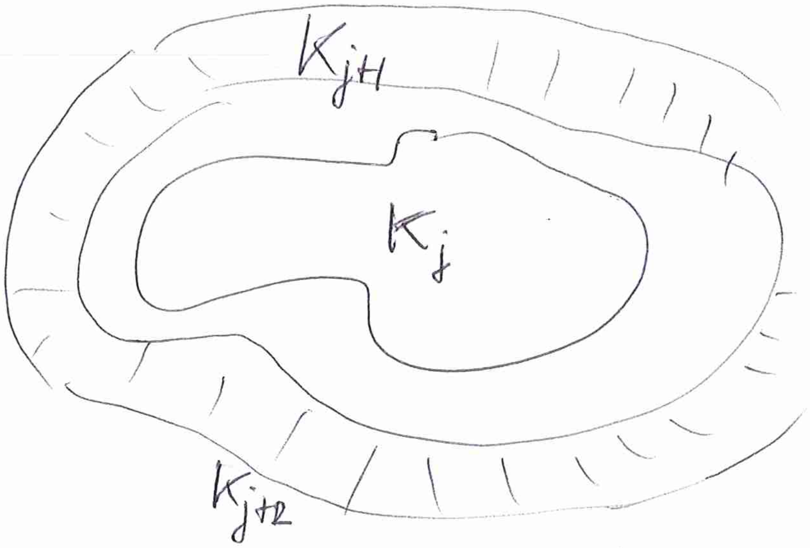
Uporabimo ~~to~~ formulo za $v = |f|^2$, f holomorfna. S tem je lema dokazana.

Induktivno najdemo zaporedje subh. funkcij $v_j \in Sh(\Omega)$, tako da je

$v_j \geqq 0$,

$v_j = 0$ v okolici K_j.

$v_j > j$ in strogo sh. na $K_{j+2} \setminus K_{j+1}$:



$\rho := \sum_{j=1}^{\infty} v_j + |z|^2$ je strogo sh. fn. izčrpanja na domeni Ω.

Z istim dokazom lahko dokažemo naslednji natančnejši izrek.

IZREK. Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ domena in $K = \hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ kompaktna holomorfno konveksna množica v Ω.
Za vsako odprto množico U, $K \subset U \subset\subset \Omega$, obstaja subharmonična funkcija izčrpanja $\rho \geq 0$ na Ω, tako da je

$$K \subset \{\rho = 0\} \subset\subset U.$$

Dokaz. Za začetno množico v izčrpanju (glej prejšnji izrek) vzamemo $K_1 = K$. Preostali del dokaza ostane nespremenjen.

Opomba. Če vzamemo

$$\tilde{\rho} = \rho + \varepsilon \cdot (|z|^2 - c), \quad \varepsilon > 0,$$

kjer je $|z|^2 - c < 0$ na K in je $\varepsilon > 0$ dovolj majhen, dobimo strogo sh. funkcijo izčrpanja $\tilde{\rho} : \Omega \to \mathbb{R}$, ki zadošča

$$\tilde{\rho}|_K < 0, \quad \tilde{\rho}|_{\Omega \setminus U} > 0.$$

PONOVITEV (NATANČNEJE)

SUBHARMONIČNE FUNKCIJE IZČRPANJA.

IZREK Naj bo Ω domena v $\mathbb{C}$ in $K = \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ kompaktna holo. konveksna množica v Ω.

Za poljubno odprto okolico $U \supset K$ obstaja gladka subharmonična funkcija izčrpanja $u : \Omega \to \mathbb{R}_+$, tako da je

(i) $K \subset \{z \in \Omega : u(z) = 0\} \subset U$, in

(ii) u je strogo subharmonična na množici $\{u > 0\}$; v posebnem, na $\Omega \setminus U$.

Dokaz. Izberemo izčrpanje

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = \Omega$$

s kompaktnimi $\mathcal{O}(\Omega)$-konveksnimi množicami; tako da je $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ $(\forall j \in \mathbb{Z}_+)$ in je

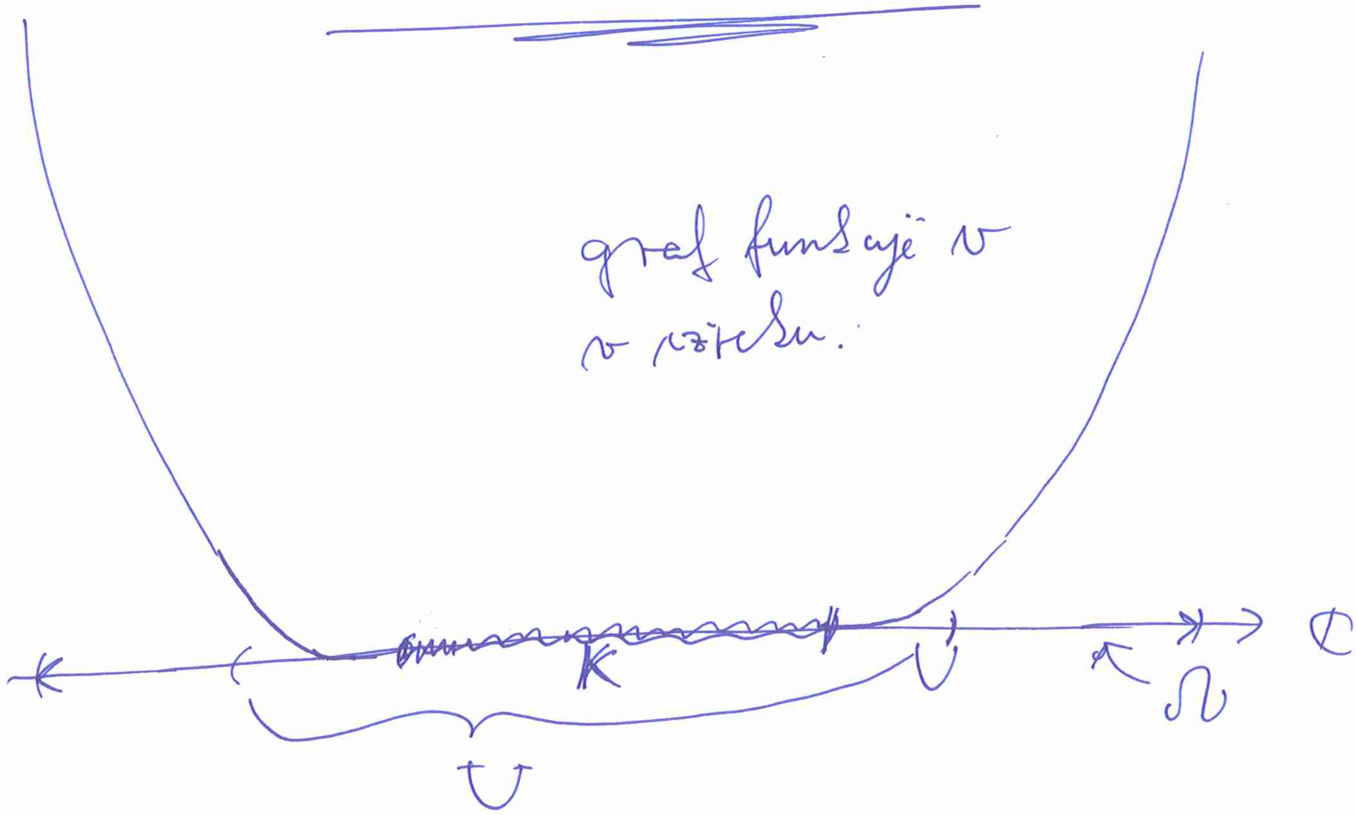
$$K_2 \subset U.$$

Začetni korak indukcije: za vsako točko $p \in \overline{K_2 \setminus K_1}$ obstaja subh. fn. $v_p \geq 0$, ki je enaka 0 na neki okolici od $K = K_0$ in velja $\Delta(v_p)(p) > 0$. Zaradi kompaktnosti $\overline{K_2 \setminus K_1}$ je končna vsota takih funkcij, $u_1 : \Omega \to \mathbb{R}_+$, strogo sh. na $\overline{K_2 \setminus K_1}$ in je $= 0$ na okolici od K_0. Lahko vzamemo $u_1 \geq 1$ na $\overline{K_2 \setminus K_1}$.

V drugem koraku najdemo psh. funkcijo $u_2 \geq 0$, ki je strogo sh. in pozitivna, $u_2 \geq 1$, na $\overline{K_3 \setminus K_2}$, $u_2 = 0$ na okolici od K_1.

Induktivno nadaljujemo.

Vsota $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ ~~je~~ zadošča trditvi izreka.



STROGO SUBHARMONIČNE DEFINICIJSKE FUNKCIJE.

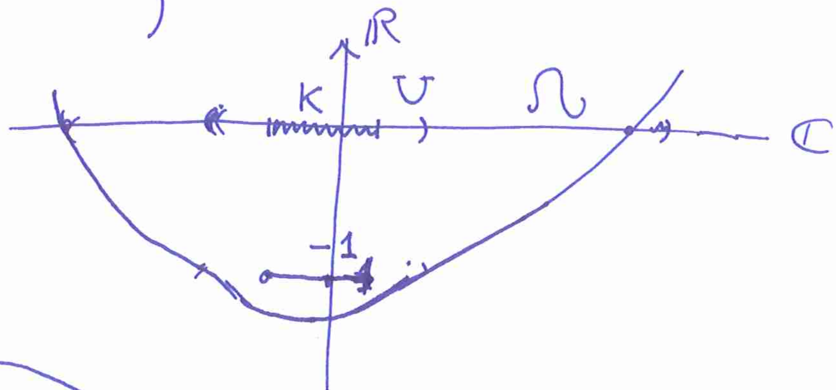
IZREK. Naj bo $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ domena z gladkim ($\mathcal{C}^2$) robom in naj bo $K \subset \Omega$ neka kompaktna $\mathcal{O}(\Omega)$-konveksna množica.

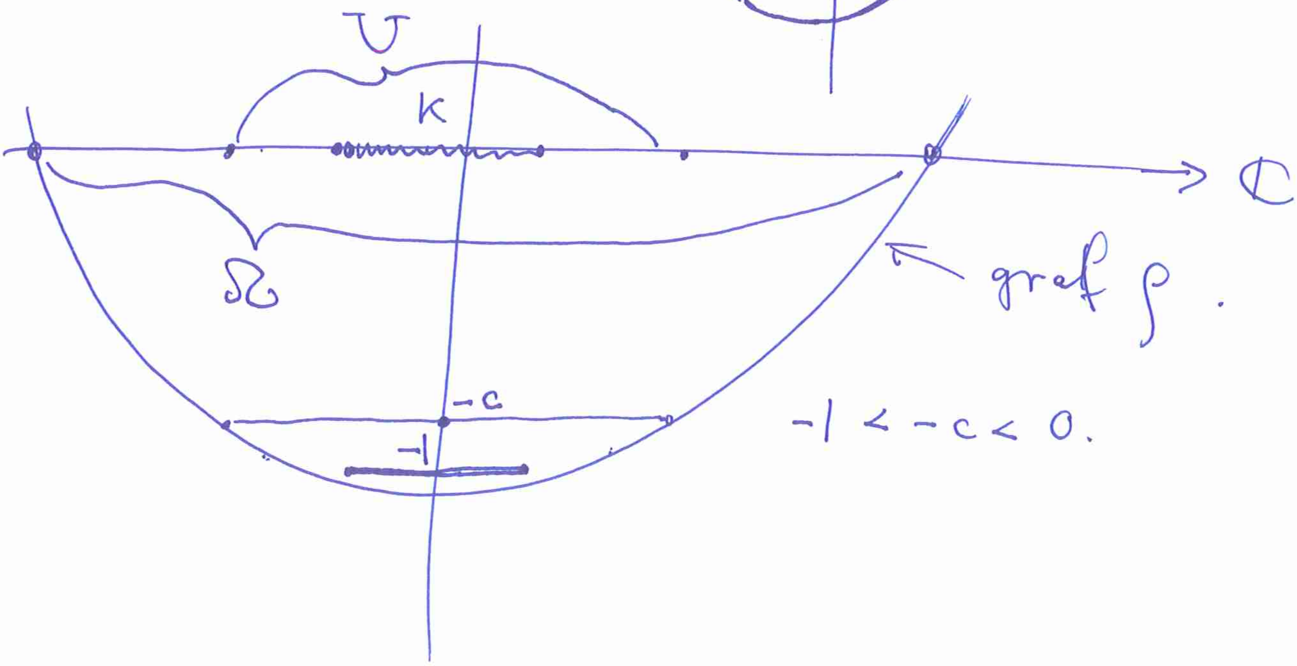
Potem za vsako odprto okolico $U \subset \Omega$ množice K obstaja gladka strogo subharmonična funkcija $\rho : V \to \mathbb{R}$ na neki odprti množici $V \supset \overline{\Omega}$, tako da velja:

(i) $\Omega = \{z \in V : \rho(z) < 0\}$;

(ii) $d\rho_z \neq 0 \quad \forall z \in \partial\Omega = \{\rho = 0\}$;

(iii) $\rho < -1$ na K in $\rho > -1$ na $\Omega \setminus U$.





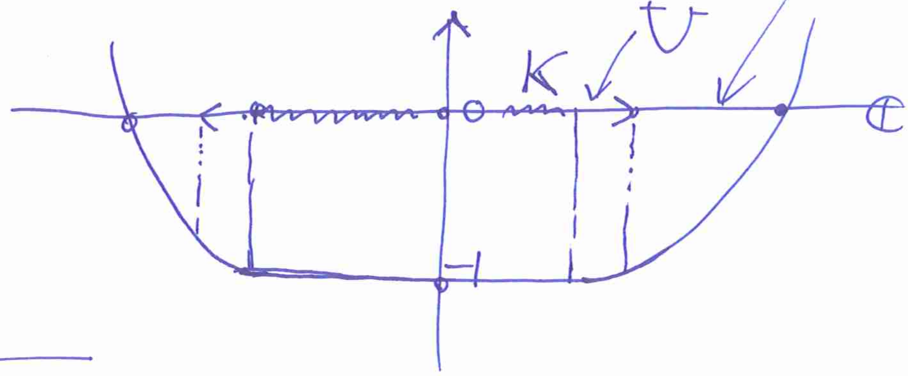
$-1 < -c < 0$.

Dodatek. Zahteve lahko spremenimo takole:

(i) ρ šibko sh. na V, strogo sh. na $V \setminus U$

(ii) $\Omega = \{\rho < 0\}$, $d\rho \neq 0$ na $\partial\Omega$.

(iii) $\rho = -1$ na neki okolici K
in $\rho > -1$ na $V \setminus U$.



Dokaz. Najprej konstruiramo strogo subharmonično definicijsko funkcijo v okolici roba $\partial\Omega$.

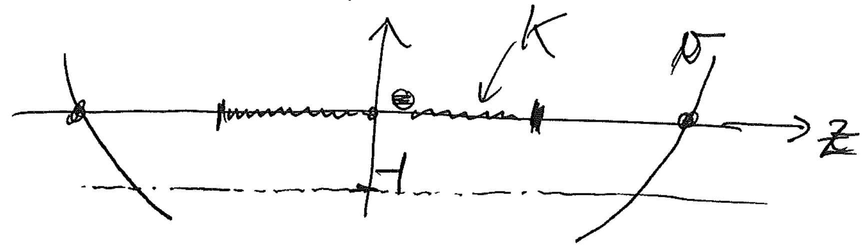
Naj bo u poljubna def. funkcija razreda C^2 na okolici $V \supset \partial\Omega$; $V \cap \Omega = \{z \in V : u(z) < 0\}$, $du \neq 0$ na V.

Vzamemo
$$v = (e^{tu} - 1)/t, \quad t \gg 0.$$

Tedaj je
$$\Delta v = e^{tu}\left(t \cdot |\nabla u|^2 + \Delta u\right).$$

Ker je $\nabla u \neq 0$ vzdolž $\partial\Omega = \{u = 0\}$, lahko izberemo $t \gg 0$ dovolj velik, da je $\Delta v > 0$ na morda manjši okolici $V' \supset \partial\Omega$; $\overline{V'} \cap K = \emptyset$.

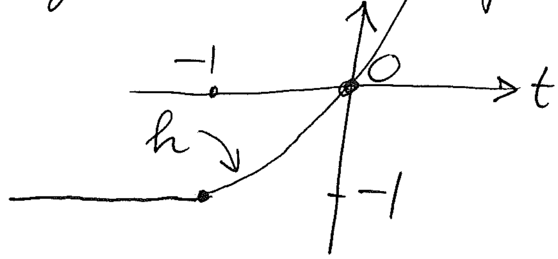
Če pomnožimo v s primerno konstanto $c>0$, dobimo subharmonično funkcijo na $V' \supset \partial\Omega$, tako da je množica $\{z \in V' : -1 \leq v(z) \leq 0\}$ kompakt, ki ne seka K.



Naj bo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naraščajoča konveksna funkcija,

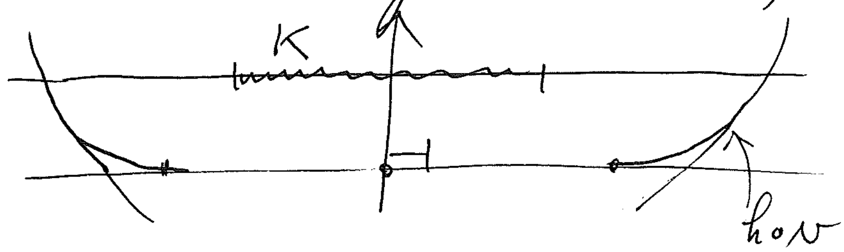
$h(t) = -1$ za $t \leq -1$,

$h(0) = 0$.



Tedaj je funkcija $h \circ v$:

- $h \circ v \geq -1$, definirana na $\Omega \cup V'$
- subharmonična; strogo subharmonična na množici $h \circ v > -1$ (torej v okolici $W \supset \partial\Omega$)
- $h \circ v = -1$ na okolici K.



$$\rho \overset{\text{def}}{=} h \circ v + \varepsilon \cdot \chi \cdot g$$

$\varepsilon > 0$ majhen; $\begin{cases} \chi : \mathbb{C} \to [0,1] \text{ gladka} \\ \chi = 1 \text{ na } \Omega \setminus W \supset K \\ \operatorname{supp} \chi \subset\subset \Omega \\ \operatorname{supp} d\chi \subset\subset \Omega \cap W \end{cases}$

$g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ subharmonična funkcija izčrpanja, $K \subset \{g = 0\} \subset V$. Če je $\varepsilon > 0$ dovolj majhen, funkcija ρ zadošča izreku.

IV.9. OSNOVE MORSEJEVE TEORIJE

Morsejeva teorija. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Naj bo $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ gladka ($\mathcal{C}^2$) funkcija.

ρ se imenuje Morsejeva funkcija, če so vse njene kritične točke neizrojene:

$$\nabla\rho(p) = 0 \Rightarrow \det \mathrm{Hess}_\rho(p) \neq 0.$$

$$\Longleftrightarrow \det\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right) \neq 0.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \text{ lastne vrednosti}, \\ \lambda_j \neq 0, \; \forall j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Morsejeva lema. Skoraj vsaka gladka funkcija je Morsejeva.
(Teorija transverzalnosti, Sardova lema).

"Skoraj vsaka" pomeni: množica funkcij v prostoru $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, ki niso Morsejeve, je 1. kategorije v fini Whitneyevi topologiji na $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

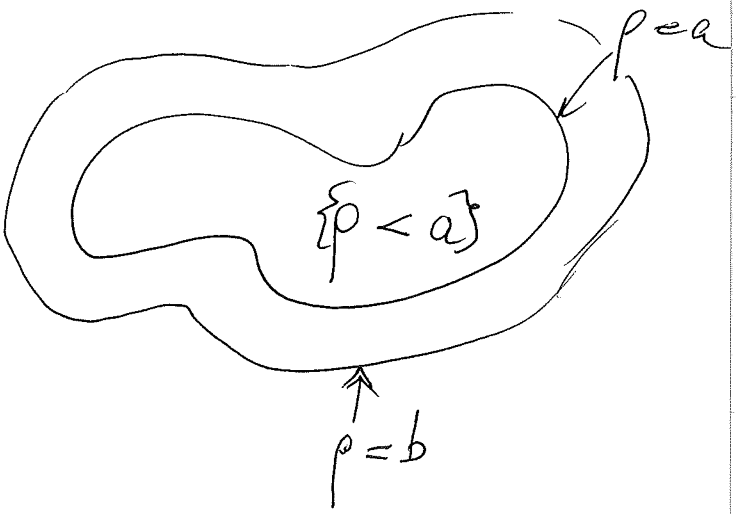
Po domače: vsako gladko funkcijo lahko poljubno dobro aproksimiramo z Morsejevimi funkcijami.

IZREK. Denimo, da je množica

$$\{x\in\Omega :\ a\le \rho(x)\le b\}$$

kompaktna v Ω in da ρ nima kritičnih vrednosti na intervalu $[a,b]$. Potem je domena

$$\{\rho<a\} \text{ difeomorfna domeni } \{\rho<b\}.$$



Dokaz. Izrek o cevasti okolici:

nivojna ploskev

$$S_a=\{\rho=a\}\overset{\text{kompakt}}{\subset}\Omega,$$

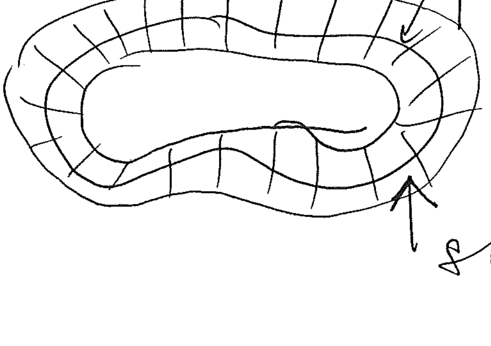
$$\nabla\rho\neq 0 \text{ na } S_a,$$

ima okolico difeomorfno $S_a\times(-\varepsilon,+\varepsilon)$

~~Nagla N normala~~ Preslikava

$$\varphi: S_a\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^n,\quad \varphi(x,t)=x+t\cdot\nabla\rho(x)$$
$$(x\in S_a,\ t\in(-\varepsilon,\varepsilon))$$

je difeomorfizem ~~za~~ majhen $\varepsilon>0$ (izrek o inverzni fu.).



Odtod direktno konstruiramo difeomorfizem

$$\Omega_a = \{\rho < a\} \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \Omega_{a'} = \{\rho < a'\}$$

za vsak a' dovolj blizu a.

V končno mnogo korakih (kompaktnost) dobimo difeomorfizem: $\Omega_a \xrightarrow{\cong} \Omega_b$.

Preostane nam glavni del: analiza kritičnih točk (Morsejevih).

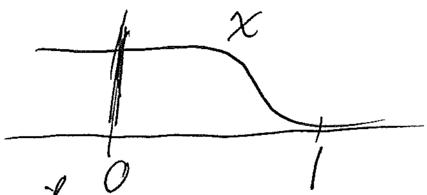
Lahko vzamemo $p = 0$, $\rho(0) = 0$, $\nabla\rho(0) = 0$;

$$\rho(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j}_{Q(x)} + o(|x|^2).$$

Ostanek lahko odpravimo:

$\chi \geq 0$ na $\mathbb{R}$, supp χ komp.
$\chi = 1$ blizu 0

$$\tilde{\rho}(x) = Q(x) + \chi\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot|x|^2\right)\cdot o(|x|^2)$$



Vse lastnosti se ohranijo za $\varepsilon > 0$ majhen

$\tilde{\rho} = Q$ blizu $x = 0$.

Q je simetrična kvadratna forma.

Z ortogonalno transformacijo koordinat jo lahko diagonaliziramo in dobimo novo fn. oblike

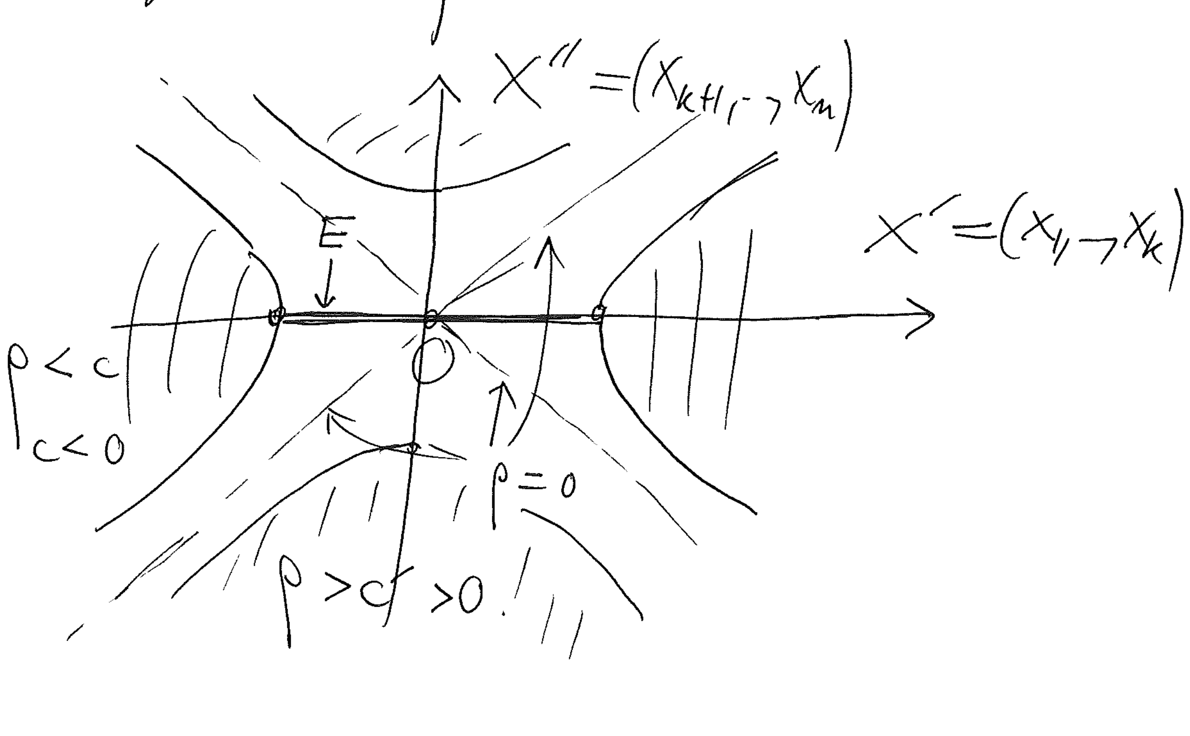
$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2 \; ; \quad \lambda_j \neq 0.$$

Z dilatacijo koordinat $(x_j \to c_j x_j)$ lahko vse $\lambda_j > 0$ spremenimo v $+1$ in vse $\lambda_j < 0$ v -1.

Dobimo:

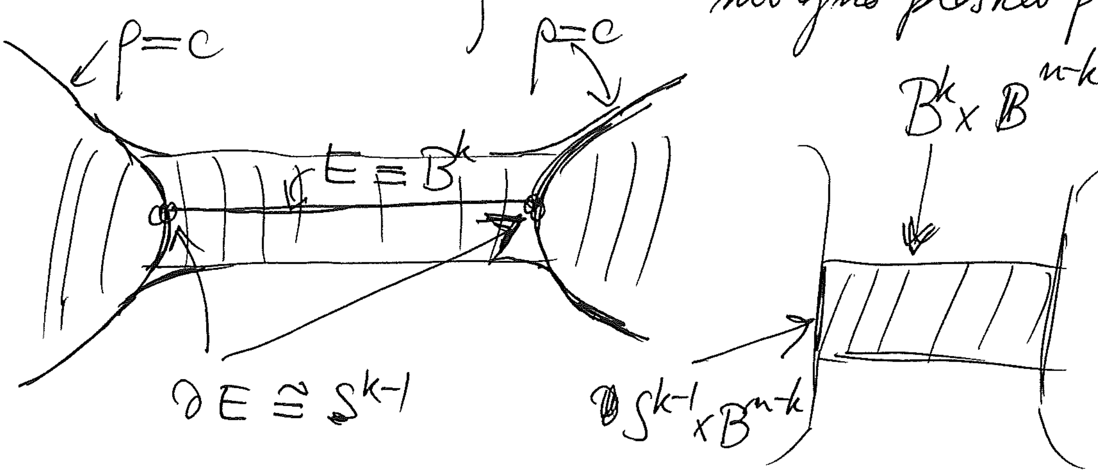
$$f = -\sum_{j=1}^{k} x_j^2 + \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2 .$$

k = Morsejev index f v kritični točki 0.



Topološka ~~sprememba~~ sprememba podmnogoterosti $\{\rho \leq c\}$ pri prehodu kritične vrednosti $c = 0$.

$\{\rho \leq c'\}$ za $c' > 0$ dobimo tako, da na ~~podmnogoterost~~ podmnogoterost $\{\rho \leq c\}$, $c < 0$, nalepimo k-dim disk (kroglo) $E \cong B^k \subset \mathbb{R}^k$, z robom $\partial E \cong S^{k-1} \subset \{\rho = c\}$, prilepljenim na nivojno ploskev $\rho = c$.



E = stržen ročaja. Odebelimo:

$$\left(B^k \times B^{n-k}, \partial B^k \times B^{n-k}\right) = \left(B^k \times B^{n-k}, S^{k-1} \times B^{n-k}\right)$$

k-ročaj.

$\boxed{\text{CW-kompleksi}}$

Morsejeva teorija strogo sh. funkcije

Očitno strogo s.h. funkcija nima lokalnih maksimumov.

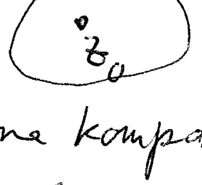
Naj bosta λ_1, λ_2 lastni vrednosti Hessejeve matrike $H_\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix}$.

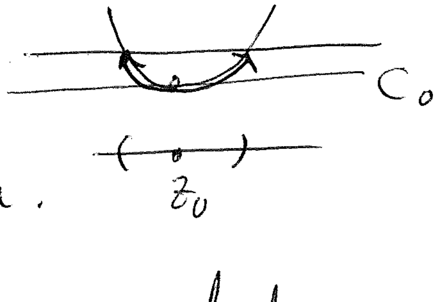
Tedaj je $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} H_\rho = \rho_{xx} + \rho_{yy} = \Delta\rho > 0$.

Torej je vsaj ena lastna vrednost > 0; kritične točke ρ so bodisi lokalni minimumi, bodisi sedelne točke.

Sprememba topologije podnivojnice $\{\rho < c\}$, ko c preide kritično vrednost c_0 v kritični točki z_0:

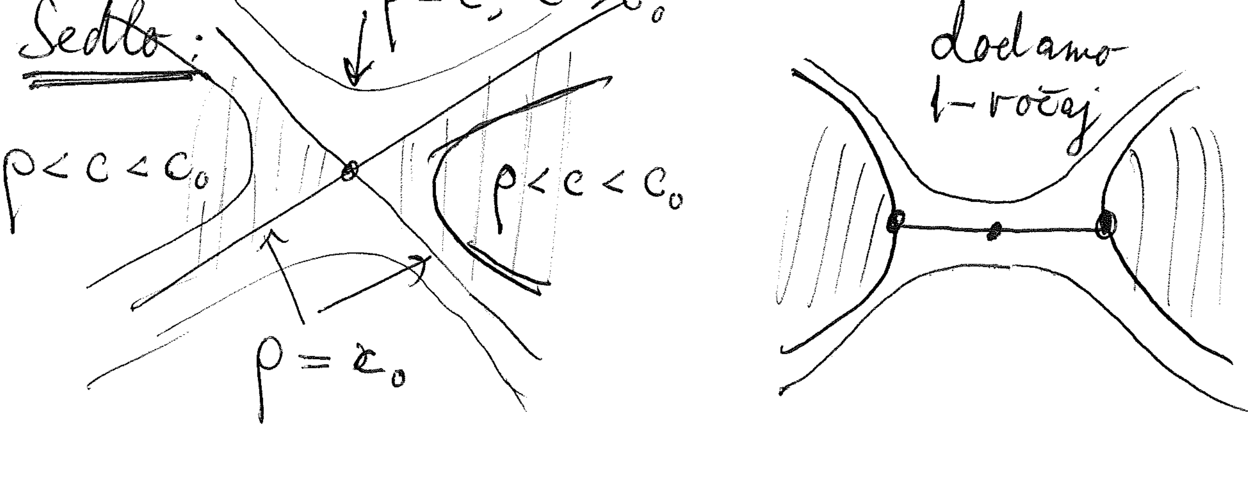
1° Minimum:





nova povezana komponenta.

2° Sedlo:



S pomočjo Morsejeve teorije vidimo, ~~sledilo~~:
da obstaja gladka funkcija g na Ω,
ki ima predpisan Taylorjev razvoj

$$g(z) = P_j(z-a_j) \text{ v okolici } z=a_j \text{ za } \forall j \in \mathbb{N}$$

in ki je $\neq 0$ na $\Omega \setminus \{a_j\}_j^\infty$.

S tem lahko rešimo Weierstrassov interpolacijski problem na Ω z uporabo $\bar\partial$-metode, kot smo že pokazali.