# V.

# REŠITEV $\bar{\partial}$-ENAČBE NA DOMENAH V $\mathbb{C}$ S HÖRMANDERJEVO METODO.


Literatura:

L. Hörmander: $L^2$-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator.
Acta Math. 113, 89 – 152 (1965)

L. Hörmander: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. 3rd Ed.
Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 1990.

Weylova lema:

E. M. Forster: Lectures on Riemann Surfaces.
Graduate Texts in Math., 81.
Springer-Verlag, New York, 1981.

# Rešitev nehomogene $\bar\partial$-enačbe v $L^2_\varphi(\Omega)$.

GLAVNI IZREK. Naj bo $\Omega$ domena v $\mathbb{C}$ in $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ strogo subharmonična funkcija na $\Omega$: $\Delta\varphi > 0$.

Tedaj za vsako funkcijo $f \in L^2_{loc}(\Omega)$ obstaja rešitev $u \in L^2_{loc}$ enačbe

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \bar z} = f \\ \displaystyle\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} \le \int_\Omega \frac{|f|^2}{\Delta\varphi} \cdot e^{-\varphi} \end{cases}$$

kjer je $\Delta\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial \bar z}$. (Izpustili smo faktor 4!).

Opomba. Funkcija $u$ v izreku je distribucijska rešitev enačbe $\bar\partial u = \frac{\partial u}{\partial \bar z} = f$.

Če je $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, potem vemo, da ima enačba $\partial u/\partial \bar z = f$ lokalno (v okolici poljubne točke $a \in \Omega$) rešitev razreda $\mathcal{C}^1$, podano s Cauchy–Greenovo formulo.

Če je $h$ poljubna druga lokalna rešitev enačbe $\partial h/\partial \bar z = f$, je $\frac{\partial}{\partial \bar z}(u-h) = 0$, torej je $u-h$ holomorfna funkcija. (To velja tudi v primeru, če je $u$ distribucija.)

Torej je vsaka rešitev enačbe $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = f$ razreda $\mathcal{C}^1$ (oz. vsaj toliko gladka kot $f$).

Dokaz. Naj bo $u \in L^2_{loc}(\Omega)$. Enačba

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} = f \quad \text{v smislu distribucij}$$

velja natanko tedaj, ko za vsako testno funkcijo $\alpha \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ velja

$$\int_\Omega f\alpha \left(= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \bar z}\cdot \alpha\right) = -\int_\Omega u \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \bar z}.$$

Integral je po Lebesguovi meri na $\mathbb{C}$.

Definirajmo:

$$L^2_\varphi(\Omega) = \left\{ f \in L^2_{loc}(\Omega) : \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} < +\infty \right\}$$

To je Hilbertov prostor s skalarnim produktom

$$\langle f, g\rangle_{L^2_\varphi} = \langle f, g\rangle_\varphi = \int_\Omega f \cdot \bar g\, e^{-\varphi}.$$

Operator $\bar\partial = \partial/\partial \bar z : L^2_\varphi(\Omega) \longrightarrow L^2_\varphi(\Omega)$ je gosto definiran, neomejen, $\mathbb{C}$-linearen operator.

(Definiran je npr. na gosti množici $u \in \mathcal{C}^1_c(\Omega) \subset L^2_\varphi(\Omega)$.)

(Operator je tudi <u>zaprt</u>, to je, ima <u>zaprt graf</u>.)

Poiščimo formalni adjungirani operator $\bar{\partial}^*_\varphi$ operatorja $\bar{\partial} : L^2_\varphi \longrightarrow L^2_\varphi$:

$$\langle \bar{\partial} u, g \rangle_\varphi = \langle u, \bar{\partial}^*_\varphi g \rangle \; ; \qquad \forall u \in Dom(\bar{\partial}), \; \forall g \in C^\infty_c(\Omega).$$

Izhajamo iz identitete (integracija per partes):

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \cdot \alpha = - \int_\Omega u \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} \; ; \qquad \forall \alpha \in C^\infty_c(\Omega).$$

Pišimo $\alpha = \bar{g} e^{-\varphi}$ ; $g \in C^2_c(\Omega)$. Sedaj:

$$\langle \bar{\partial} u, g \rangle_\varphi = \int_\Omega \bar{\partial} u \cdot \bar{g} e^{-\varphi} = - \int_\Omega u \cdot \frac{\partial (\bar{g} e^{-\varphi})}{\partial \bar{z}} e^{\varphi} \cdot e^{-\varphi}$$

Sedaj vidimo:

$$\bar{\partial}^*_\varphi g = - \frac{\partial (g e^{-\varphi})}{\partial z} \cdot e^{\varphi} = - \frac{\partial g}{\partial z} + g \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\boxed{\bar{\partial}^*_\varphi g = - \frac{\partial g}{\partial z} + g \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}}$$

FORMALNI ADJUNGIRANI OPERATOR

Če je $\varphi = 0$ (utež $e^{-0} = 1$), dobimo $\bar{\partial}^* g = - \frac{\partial g}{\partial z}$.

POVZETEK DOKAZA

Trditev 1. Naslednji trditvi sta ekvivalentni za $f \in L^2_\varphi(\Omega)$ in $C \geq 0$:

(a) $\exists\, u \in L^2_\varphi(\Omega)$, $\begin{cases} \bar{\partial} u = f \text{ distribucijsko} \\ \|u\|^2_\varphi = \int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} \leq C \end{cases}$

(b) $|\langle f, g \rangle_\varphi|^2 \leq C \cdot \|\bar{\partial}^*_\varphi g\|^2_\varphi, \quad \forall g \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$.

Dokaz: Funkcionalna analiza (Hahn-Banach, Riesz).

Trditev 2. Naj bo $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ in $g \in \mathcal{C}^2_c(\Omega)$. Tedaj velja

$$\int_\Omega \Delta\varphi \cdot |g|^2 e^{-\varphi} + \int_\Omega \left|\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\right|^2 \cdot e^{-\varphi} = \int_\Omega |\bar{\partial}^*_\varphi g|^2 e^{-\varphi}$$

Posledica: $\int_\Omega \Delta\varphi \cdot |g|^2 \cdot e^{-\varphi} \leq \|\bar{\partial}^*_\varphi g\|^2, \quad \forall g \in \mathcal{C}^2_c(\Omega)$.

Dokaz izreka: $\Delta\varphi > 0$; $g \in \mathcal{C}^2_c(\Omega)$; $f$ kot v izreku

$$|\langle f, g \rangle_\varphi|^2 = \left|\left\langle \frac{f}{\sqrt{\Delta\varphi}}, \sqrt{\Delta\varphi} \cdot g \right\rangle_\varphi\right|^2$$

$$\overset{\text{(Cauchy-Schwarz)}}{\leq} \int_\Omega \frac{|f|^2}{\Delta\varphi} e^{-\varphi} \cdot \int_\Omega \Delta\varphi \cdot |g|^2 e^{-\varphi}$$

$$\overset{\text{(Trd. 2)}}{\leq} \int_\Omega \frac{|f|^2}{\Delta\varphi} \cdot e^{-\varphi} \cdot \|\bar{\partial}^*_\varphi g\|^2_\varphi .$$

Torej velja (b) s konstanto $C = \int_\Omega \frac{|f|^2}{\Delta\varphi} e^{-\varphi}$. Po trditvi 1 obstaja rešitev $\bar{\partial} u = f$, ki zadošča oceni $\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} \leq C$.

**Trditev 1.** Naj bo $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

Naslednji trditvi sta ekvivalentni za $f \in L^2_\varphi(\Omega)$ in $C \geqq 0$:

(a) Obstaja $u \in L^2_\varphi(\Omega)$, ki zadošča

$$\bar\partial u = f \quad (\text{distribucijsko}) \quad \text{in} \quad \|u\|^2_\varphi = \int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} \leqq C.$$

(b) Za vsako testno funkcijo $g \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ velja

$$\left| \int f \bar{g} e^{-\varphi} \right|^2 \leqq C \cdot \int |\bar\partial^*_\varphi g|^2 e^{-\varphi}.$$

**Opomba:** (b) lahko zapišemo v obliki

$$|\langle f, g \rangle_\varphi|^2 \leqq C \cdot \|\bar\partial^*_\varphi g\|^2_\varphi \ ; \quad \forall g \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega). \quad (*)$$

**Dokaz:** (a) $\Rightarrow$ (b). Naj velja (a); $f = \bar\partial u$ + ocena $\|u\|^2_\varphi \leqq C$.

Tedaj:

$$\langle f, g \rangle_\varphi = \langle \bar\partial u, g \rangle_\varphi$$
$$= \langle u, \bar\partial^*_\varphi g \rangle_\varphi$$

Po Hölderjevi neenakosti (oz. Cauchy–Schwarzovi neen.)

$$|\langle f, g \rangle_\varphi|^2 \leqq \|u\|^2_\varphi \cdot \|\bar\partial^*_\varphi g\|^2_\varphi$$
$$\leqq C \cdot \|\bar\partial^*_\varphi g\|^2_\varphi .$$

Torej velja $(*)$ in zato (b).

(b) $\Rightarrow$ (a). Množica

$$E \overset{\text{def}}{=} \{\bar\partial_\varphi^* g \ : \ g \in C_c^\infty(\Omega)\} \subset L^2_\varphi(\Omega)$$

je $\mathbb{C}$-linearen podprostor Hilbertovega prostora $L^2_\varphi(\Omega)$.

Iz neenakosti (*) sledi, da predpis

$$\mathcal{L} : E \to \mathbb{C}; \quad \mathcal{L}(\bar\partial_\varphi^* g) \overset{\text{def}}{=} \langle f, g\rangle_\varphi = \int_\Omega f \bar g e^{-\varphi} \in \mathbb{C} \qquad (**)$$

definira omejen, $\mathbb{C}$-antilinearen funkcional na $E$:

$$|\mathcal{L}(\bar\partial_\varphi^* g)|^2 = |\langle f, g\rangle_\varphi|^2 \leqq C \cdot \|\bar\partial_\varphi^* g\|_\varphi^2 ; \quad \forall g \in C_c^\infty(\Omega).$$

$\mathcal{L}$ je dobro definiran, saj iz $\bar\partial_\varphi^* g = \bar\partial_\varphi^* g'$ sledi $\|\bar\partial_\varphi^*(g - g')\| = 0$ in zato $\mathcal{L}(\bar\partial_\varphi^* g) = \mathcal{L}(\bar\partial_\varphi^* g')$.

Po zveznosti lahko $\mathcal{L}$ razširimo do zveznega linearnega funkcionala $\mathcal{L} : \bar E \to \mathbb{C}$ z isto normo.

Ker je $L^2_\varphi(\Omega)$ Hilbertov prostor, ga lahko razcepimo

$$L^2_\varphi(\Omega) = \bar E \oplus_\perp E'$$

kjer je $E'$ ortogonalni komplement od $\bar E$. Če $\mathcal{L}$ razširimo z 0 na $E'$, dobimo zvezen linearen funkcional $\mathcal{L} : L^2_\varphi(\Omega) \to \mathbb{C}$; $\mathbb{C}$-antilinearen.

Po Rieszovem izreku (elementarno) je tak funkcional podan s skalarnim produktom z nekim elementom $u \in L^2_\varphi(\Omega)$, $\|u\|^2_\varphi \leq C$ :

$$\mathcal{L}(\alpha) = \langle u, \alpha \rangle_\varphi = \int_\Omega u \, \bar{\alpha} \, e^{-\varphi}, \quad \forall \alpha \in L^2_\varphi(\Omega).$$

Vstavimo $\alpha = \bar{\partial}^*_\varphi g$, $g \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$:

$$\mathcal{L}(\bar{\partial}^*_\varphi g) = \langle u, \bar{\partial}^*_\varphi g \rangle_\varphi, \quad \forall g \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega).$$

Primerjava z definicijo (**) funkcionala $\mathcal{L}$ na da:

$$\langle u, \bar{\partial}^*_\varphi g \rangle_\varphi = \langle f, g \rangle_\varphi, \quad \forall g \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega).$$

To ravno pomeni, da velja:

$$\bar{\partial} u = f \quad \text{v smislu distribucij}.$$

Iz konstrukcije vidimo tudi, da velja:

$$\|u\|^2_\varphi \leq C,$$

kjer je $C$ konstanta v neenakosti (*).

Trditev 1 je s tem dokazana.

**Trditev 2.** Naj bo $\Omega$ domena v $\mathbb{C}$, $\varphi \in C^2(\Omega)$ in $\alpha \in C_c^2(\Omega)$. Tedaj velja:

$$\int_\Omega \Delta\varphi \cdot |\alpha|^2 e^{-\varphi} + \int_\Omega \left|\frac{\partial \alpha}{\partial \bar z}\right|^2 e^{-\varphi} = \int_\Omega |\bar\partial_\varphi^* \alpha|^2 \cdot e^{-\varphi}.$$

**Posledica:** $$\boxed{\int_\Omega \Delta\varphi \cdot |\alpha|^2 e^{-\varphi} \leq \|\bar\partial_\varphi^* \alpha\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

**Dokaz.** $\|\bar\partial_\varphi^*\alpha\|^2 = \langle \bar\partial_\varphi^*\alpha, \bar\partial_\varphi^*\alpha\rangle_\varphi = \langle \bar\partial\, \bar\partial_\varphi^*\alpha, \alpha\rangle_\varphi$.

Spomnimo se: $\bar\partial_\varphi^*\alpha = -\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \alpha \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Torej: 
$$\bar\partial(\bar\partial_\varphi^*\alpha) = -\frac{\partial^2\alpha}{\partial\bar z\,\partial z} + \frac{\partial\alpha}{\partial\bar z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \alpha\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial\bar z}$$
$$= -\Delta\alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial\bar z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \alpha\cdot\Delta\varphi.$$
$$= \bar\partial_\varphi^*\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\bar z}\right) + \alpha\cdot\Delta\varphi = \bar\partial_\varphi^*(\bar\partial\alpha) + \alpha\cdot\Delta\varphi$$

$\mapsto$ $[\bar\partial, \bar\partial_\varphi^*](\alpha) = \alpha\cdot\Delta\varphi$ ; $[\bar\partial, \bar\partial_\varphi^*] = (\Delta\varphi)$.

Odtod: 
$$\|\bar\partial_\varphi^*\alpha\|^2_\varphi = \langle \bar\partial\bar\partial_\varphi^*\alpha, \alpha\rangle_\varphi = \langle \bar\partial_\varphi^*(\bar\partial\alpha), \alpha\rangle_\varphi + \langle \Delta\varphi\cdot\alpha, \alpha\rangle_\varphi$$
$$= \langle \bar\partial\alpha, \bar\partial\alpha\rangle_\varphi + \langle \Delta\varphi\cdot\alpha, \alpha\rangle_\varphi$$
$$= \int_\Omega \left|\frac{\partial\alpha}{\partial\bar z}\right|^2 e^{-\varphi} + \int_\Omega \Delta\varphi\cdot|\alpha|^2 e^{-\varphi}.$$

Trditev 2 je dokazana.

<u>Dokaz glavnega izreka.</u> Označimo

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\Delta\varphi} \cdot e^{-\varphi} \geqq 0 .$$

Če je $C = +\infty$, ni kaj dokazovati. Recimo, da je $0 \leqq C < +\infty$.

Iz Trditve 1, ekvivalenca (a) $\Leftrightarrow$ (b), sledi, da je potrebno dokazati neenakost

$$|\langle f, g\rangle_\varphi|^2 \leqq C \cdot \|\bar{\partial}^*_\varphi g\|^2_\varphi , \qquad \forall g \in C^\infty_c(\Omega). \quad (*)$$

Velja: $$|\langle f, g\rangle_\varphi|^2 = \left|\left\langle \frac{f}{\sqrt{\Delta\varphi}}, \sqrt{\Delta\varphi}\cdot g\right\rangle_\varphi\right|^2$$

$$\text{(Cauchy-Schwarz)} \leqq \left\|\frac{f}{\sqrt{\Delta\varphi}}\right\|^2_\varphi \cdot \left\|\sqrt{\Delta\varphi}\cdot g\right\|^2_\varphi$$

$$= \int_\Omega \frac{|f|^2}{\Delta\varphi} \cdot e^{-\varphi} \cdot \int_\Omega \Delta\varphi \cdot |g|^2 e^{-\varphi}$$

$$= C \cdot \int_\Omega \Delta\varphi \cdot |g|^2 e^{-\varphi}$$

(po definiciji konstante $C$).

Po posledici Trditve 2 je

$$\int_\Omega \Delta\varphi \cdot |g|^2 e^{-\varphi} \leqq \int_\Omega |\bar{\partial}^*_\varphi g|^2 e^{-\varphi} = \|\bar{\partial}^*_\varphi g\|^2_\varphi .$$

Neenakost $(*)$ sledi neposredno iz zadnjih dveh neenakosti.

<u>POSLEDICA 1</u>. Naj bo $\psi : \Omega \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^2$ subharmonična funkcija: $\Delta\psi \geqq 0$. Tedaj za vsako funkcijo $f \in L^2_{loc}(\Omega)$ obstaja rešitev $u \in L^2_{loc}(\Omega)$ problema

$$\bar{\partial} u = f \quad \text{(distribucijsko)}$$

in
$$\int_\Omega \frac{|u|^2}{(1+|z|^2)^2} e^{-\psi} \leqq \int_\Omega |f|^2 e^{-\psi}.$$

<u>Dokaz</u>. Uporabimo Izrek s strogo subharmonično funkcijo

$$\varphi = \psi + 2\log(1+|z|^2).$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \bar{z}} + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{1+|z|^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{(1+|z|^2)^2} \geqq \frac{1}{(1+|z|^2)^2}.$$

$$e^{-\varphi} = e^{-\psi} \cdot e^{-2\log(1+|z|^2)} = \frac{e^{-\psi}}{(1+|z|^2)^2}.$$

$$\int_\Omega \frac{|f|^2}{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial \bar{z}}\right)} e^{-\varphi} \leqq \int_\Omega |f|^2 \cdot (1+|z|^2)^2 \cdot \frac{e^{-\psi}}{(1+|z|^2)^2} = \int_\Omega |f|^2 \cdot e^{-\psi}$$

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} = \int \frac{|u|^2}{(1+|z|^2)^2} e^{-\psi}.$$

Posledica je dokazana.

<u>Posledica 2.</u> Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ omejena domena. Obstaja konstanta $C > 0$, odvisna samo od premera $\mathrm{diam}(\Omega)$, tako da za vsako subharmonično funkcijo $\varphi$ na $\Omega$ in za vsak $f \in L^2_\varphi(\Omega)$ obstaja rešitev problema

$$\bar\partial u = f, \quad \int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} \leq C \cdot \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi}.$$

<u>Dokaz</u>. Recimo, da je $\Omega \subset \mathbb{D}(0,R)$. Tedaj je

$$\frac{1}{(1+|z|^2)^2} \geq \frac{1}{(1+R^2)^2}$$

$$\int_\Omega \frac{|u|^2 e^{-\varphi}}{(1+|z|^2)^2} \geq \frac{1}{(1+R^2)^2} \cdot \int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi}.$$

Po prejšnji posledici obstaja rešitev $u$ enačbe $\bar\partial u = f$, ki zadošča $\displaystyle\int_\Omega \frac{|u|^2 e^{-\varphi}}{(1+|z|^2)^2} \leq \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi}$.

Zadnji dve neenakosti implicirata

$$\boxed{\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} \leq (1+R^2)^2 \cdot \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi}.}$$

Konstanta je neodvisna od subharmonične fn. $\varphi$; $\Delta\varphi \geq 0$.

## Regularnost rešitev.

**IZREK** [Weylova lema; glej Forster, str. 194, Izrek 24.9]
Naj bo $\Omega$ odprta množica v $\mathbb{C}$ in $T$ neka distribucijska rešitev enačbe $\Delta T = 0$ na $\Omega$.
Tedaj je $T$ gladka (harmonična) funkcija na $\Omega$.

Natančneje: obstaja harmonična funkcija $u$ na $\Omega$, tako da je $\langle T, \alpha \rangle = \int_\Omega u\alpha$ za vsako $\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

**POSLEDICA**. Naj bo $T$ distribucija na odprti množici $\Omega \subset \mathbb{C}$, ki zadošča $\partial T/\partial \bar{z} = 0$.
Tedaj je $T$ holomorfna funkcija na $\Omega$.

Dokaz posledice: $\Delta T = 4 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T\right) = 0$.
Torej je $T$ harmonična funkcija (gladka).
Ker je $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 0$, je $T$ holomorfna.

---

Za dokaz Weylovega lema, glej citiran vir (Forster).

**Posledica** (Izrek o regularnosti rešitev enačbe $\bar\partial u = f$)..

Če je $f \in \mathcal{C}^r(\Omega)$, $r \geq 1$, tedaj je vsaka (lokalna) rešitev enačbe $\bar\partial u = \frac{\partial u}{\partial \bar z} = f$ na $\Omega$ razreda $\mathcal{C}^r$.

**Dokaz.** Rezultat je lokalen in ga je dovolj dokazati na disku. $\Omega = \mathbb{D}$.

Vemo, da obstaja rešitev $\frac{\partial u_0}{\partial \bar z} = f$, $u_0 \in \mathcal{C}^r$..

Naj bo $u$ poljubna druga distribucijska rešitev. Tedaj je

$$T \overset{\text{def}}{=} u - u_0$$

distribucija, ki zadošča $\bar\partial T = 0$ na $\Omega$.

Po (posledici) Weylovem lema je $T$ (gladka) holomorfna funkcija, $T \in \mathcal{C}^r$.

Torej je $u = u_0 + T \in \mathcal{C}^r(\Omega)$.

# 5.13

## Ocena sup-norme holomorfne funkcije s pomočjo $L^2$-norme.

**Lema.** Za vsako holomorfno funkcijo $f$ na disku $\mathbb{D}(0,r)$ velja ocena

$$|f(0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot r}\cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{D}(0,r))} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot r}\left(\iint_{\mathbb{D}(0,r)} |f|^2 dx dy\right)^{1/2}.$$

**Dokaz.** Naj bo $0 \leq \rho < r$. Cauchyeva integralna formula:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{it})}{\rho e^{it}}\cdot \rho e^{it}\cdot i\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{it})\, dt. \qquad \left(= \text{povprečna vrednost } f \text{ na krožnici } |z|=\rho.\right)$$

Pomnožimo z $\rho\, d\rho$ in integriramo po $\rho \in [0,r]$:

$$\frac{r^2}{2}\cdot f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} f(\rho e^{it})\,\rho\, d\rho\cdot dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{D}(0,r)} f \cdot dx\, dy$$

$$f(0) = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\mathbb{D}(0,r)} f\, dx\, dy$$

$$|f(0)| \leq \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\mathbb{D}(0,r)} |f|\, dx\, dy \leq \frac{1}{\pi r^2}\left(\iint_{\mathbb{D}(0,r)} |f|^2 dx\, dy\right)^{1/2}\cdot \underbrace{\left(\iint_{\mathbb{D}(0,r)} 1^2\cdot dx\, dy\right)^{1/2}}_{\sqrt{\pi r^2} = \sqrt{\pi}\cdot r}$$

$$|f(0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot r}\, \|f\|^2_{L^2(\mathbb{D}(0,r))}.$$

## Dokaz Rungejevega izreka

Naj bo $\Omega$ domena v $\mathbb{C}$, $K$ kompaktna množica v $\Omega$, $K \subset U \subset \Omega$ in $U$ odprta, ter $f \in \mathcal{O}(U)$ holomorfna funkcija na $U$.

Dokazati želimo, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $F \in \mathcal{O}(\Omega)$, ki zadošča

$$\sup_{z \in K} |F(z) - f(z)| < \varepsilon .$$

Za $r > 0$ definirajmo

$$K_r = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K) < \varepsilon \} = \bigcup_{a \in K} \mathbb{D}(a, r).$$

Izberimo $r > 0$ dovolj majhen, tako da velja

$$K_{3r} \subset U .$$

Po izreku iz poglavja 4 (glej stran 4.39) obstaja subharmonična funkcija $\psi \geq 0$ na $\Omega$, ki zadošča pogojem

$$\psi\big|_{K_r} = 0 ; \qquad \inf_{K_{3r} \setminus K_{2r}} \psi > 0 .$$

Izberimo gladko funkcijo $\chi : \Omega \to [0,1]$, tako da je

$$\chi|_{K_{2r}} = 1, \quad \operatorname{supp}\chi \subset K_{3r}, \quad \operatorname{supp}(d\chi) \subset K_{3r} \setminus K_{2r}.$$

Naj bo $t > 0$. Po glavnem izreku (glej Posledico 1) obstaja funkcija $u_t \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, ki zadošča

$$\frac{\partial u_t}{\partial \bar z} = f \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \bar z}$$

$$\int_\Omega \frac{|u_t|^2}{(1+|z|^2)^2} e^{-t\psi} \leq \int_\Omega |f|^2 \cdot \left|\frac{\partial \chi}{\partial \bar z}\right|^2 \cdot e^{-\psi t}.$$

Ker je $\operatorname{supp}\left(f \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \bar z}\right) \subset K_{3r} \setminus K_{2r}$ in je $\psi \geq c > 0$ na tej množici za neko konstanto $c > 0$, je limita desne strani pri $t \to 0$ enaka $0$.

Na $K_r$ je $\psi = 0$, torej velja $e^{-t\psi} = 1$ in zato

$$\lim_{t\to\infty} \int_{K_r} \frac{|u_t|^2}{(1+|z|^2)^2} = 0 \implies \lim_{t\to\infty} \int_{K_r} |u_t|^2 = 0.$$

Funkcija $u_t$ je na $K_r$ holomorfna. Iz leme o oceni sup-norme z $L^2$ normo dobimo:

$$\sup_K |u_t| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot r} \cdot \|u_t\|_{L^2(K_r)} \xrightarrow{t\to\infty} 0 .$$

Torej je $\sup_K |u_t|$ poljubno majhen za velik $t>0$.

Funkcija $F_t = x\cdot f - u_t \in \mathcal{O}(\Omega)$ je po konstrukciji holomorfna na $\Omega$ za $\forall t>0$.

Če je $t$ velik, je $u_t$ majhna na $K$, torej je $F|_K$ blizu $f|_K$ v sup-normi.