

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 2. kolokvij

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Lahko pišete s svinčnikom.

15. junij 2015

1. Poissonov proces ima funkcijo intenzitete

$$\rho(t) = \frac{1}{\max\{1, t\}}, \quad t \in [0, \infty).$$

- (a) (10 točk) Ali je $S_2 < \infty$ s.g. (kjer je S_2 drugi prihodni čas)? Zakaj (ne)?
(b) (15 točk) Določi $P(1 < T_1 < T_2)$, kjer je T_1 (T_2) prvi (drugi) medprihodni čas.

Rešitev. (a). Da, saj je $\int_0^\infty \rho(t)dt = \infty$ (naloga # 30 iz vaj). (b). Računamo (iz naloge # 32 poznamo skupno verjetnostno gostoto):

$$\begin{aligned} P(1 < T_1 < T_2) &= \int_1^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \frac{1}{t_1(t_1 + t_2)} e^{-1 - \log(t_1 + t_2)} \\ &= e^{-1} \int_1^\infty dt_1 \frac{1}{2t_1^2} = e^{-1}/2. \end{aligned}$$

2. V neki republiki, ki obstoji od 25. junija 1991, so časi med volitvami v državni zbor neodvisni, slučajni, enako porazdeljeni, in sicer je gostota te porazdelitve dana z $f(t) = at^3 \mathbb{1}_{[0, t_0]}(t)$, kjer je $t_0 = 4$ leta, a pa ustrezna normalizacijska konstanta.

- (a) (15 točk) Določi dolgoročno povprečno število volitev v državni zbor (na časovno enoto).
(b) (10 točk) Kakšno je upanje časa, ki bo pretekel med prvimi volitvami v državni zbor, po 16. juniju 2015, in volitvami v državni zbor ki bodo sledile le-tem?

Rešitev. (a). Iz $\int_0^{t_0} at^3 dt = 1$, sledi $a = 1/64 \text{ leto}^{-4}$. Naprej, opravka imamo s prenovitvenim procesom; iz elementarnega prenovitvenega izreka oz. krepkega zakona velikih števil, sledi, da je povprečno število volitev na časovno enoto, enako $1/\int_0^{t_0} tat^3 dt = 5/16 \text{ leto}^{-1}$. (b). Iz prenovitvene lastnosti, sledi, da je upanje časa med prvimi volitvami po danem determinističnem času, in še naslednjimi volitvami, enako upanju posameznega medprihodnega časa, $16/5$ leta. (Namreč, zaporedna številka volitev, ki bodo prve po danem determinističnem času, je čas ustavljanja glede na zaporedje medprihodnih časov volitev v državni zbor.) [Ker je vsota neodvisnih absolutno zveznih slučajnih spremenljivk absolutno zvezna, je po števeni subaditivnosti mer, verjetnost da bi kake volitve bile ravno 16. junija 2015 nič. Tako je vseeno ali gledamo prve volitve po, vključno z, ali strogo po 16. juniju 2015.]

3. (25 točk) Špela in Matija rešujeta naloge. Za reševanje i -te naloge porabi Špela čas T_i^1 , Matija pa čas T_i^2 , $i \in \mathbb{N}$. Velja: $(T_i^1)_{i \in \mathbb{N}}$ so n.e.-Exp(λ)-p., neodvisne od $(T_i^2)_{i \in \mathbb{N}}$, ki pa so n.e.-Exp(μ)-p. (μ in λ sta parametra iz $(0, \infty)$). Naloge pa rešujeta tako, da začneta z reševanjem naslednje naloge hkrati, in sicer ko je z reševanjem prejšnje naloge končal počasnejši od njiju: ob času 0 torej pričneta z reševanjem 1. naloge, ob času $\max\{T_1^1, T_1^2\}$ pričneta z reševanjem 2. naloge, ob času $\max\{T_1^1, T_1^2\} + \max\{T_2^1, T_2^2\}$ pričneta z reševanjem tretje, itd. itn. Naj bo W_t število nalog, ki jih je do časa (vključno z) t Špela rešila strogo hitreje kot Matija, $t \in [0, \infty)$. Določi s.g. limito $\lim_{t \rightarrow \infty} W_t/t$ ter $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}W_t/t$. **Namig:** Obravnavaj ustrezeni prenovitveni proces z nagradami. Kakšno izmed upanj bo morda najlažje izračunati z integralom preživetvene funkcije ...

Rešitev. Zaporedju $(T_i)_{i \in \mathbb{N}} := (T_i^1 \vee T_i^2)_{i \in \mathbb{N}}$ naj pripada prenovitveni proces N . Velja:

$$\sum_{i=1}^{N_t} R_i \leq W_t \leq \sum_{i=1}^{N_t+1} R_i, \quad t \in [0, \infty),$$

kjer je $R_i := \mathbb{1}(T_i^1 < T_i^2)$, $i \in \mathbb{N}$. Evidentno so $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n.e.p. slučajne spremenljivke $R_{i+1} \perp \sigma(T_1, \dots, T_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Naprej, zaradi neodvisnosti,

$$\mathbb{E}T_1 = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_1^1 \vee T_1^2 > t) dt = \int_0^\infty (1 - (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\mu t})) dt = \lambda^{-1} + \mu^{-1} - (\lambda + \mu)^{-1},$$

ali direktno

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T_1 &= \int_0^\infty \int_x^\infty y \lambda e^{-\lambda y} \mu e^{-\mu x} dy dx + (\mu \leftrightarrow \lambda) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty dx \mu e^{-\mu x} (e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x}) + (\mu \leftrightarrow \lambda) \\ &= \frac{\mu}{\lambda(\lambda + \mu)} + \frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2} + \frac{\lambda}{\mu(\lambda + \mu)} + \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2} \\ &= \frac{1}{\lambda + \mu} \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} \right) < \infty, \end{aligned}$$

iz neodvisnosti. Končno je $\mathbb{E}R_1 = \mathbb{P}(T_1^1 < T_1^2) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ (vemo npr. iz karakterizacije superpozicije dveh neodvisnih Poissonovih procesov; lahko tudi direktno izračunamo). Obe limiti sta tedaj enaki $\lambda/(1 + \lambda/\mu + \mu/\lambda)$!

4. (25 točk) Prenovitveni proces z zaostankom ima $T_1 \sim \text{Exp}(\mu)$, ter $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $i \geq 2$; $\{\lambda, \mu\} \subset (0, \infty)$. Določi njegovo prenovitveno mero! Kdaj je ta proces stacionaren?

Rešitev. S standardnimi oznakami je $\hat{M} = \hat{G}/(1 - \hat{F})$, kjer je $\hat{G}(u) = \mu/(u + \mu)$, $\hat{F}(u) = \lambda/(u + \lambda)$, $u \geq 0$. Sledi $\hat{M}(u) = \frac{\mu - \lambda}{u + \mu} + \frac{\lambda}{u}$, $u > 0$, preko razcepa na parcialne ulomke; torej iz injektivnosti ter linearnosti Laplace-Stieltjesove transformacije $M(t) = \lambda t + (1 - \lambda/\mu)(1 - e^{-\mu t})$, $t \in [0, \infty)$. Za stacionaren proces z $\mathbb{E}T_2 < \infty$ nujno velja, da je M linearna funkcija (vemo iz vaj, naloga # 43). V našem primeru je to možno samo če je $\lambda = \mu$. Tedaj imamo opravka s homogenim Poissonovim procesom, ki je seveda stacionaren.