

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 3. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Lahko pišete s svinčnikom.

31. avgust 2015

1. Naj bo $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e.p. slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $[0, \infty)$, pri čemer je $P(T_1 = 0) =: p \in [0, 1)$. Naj bo $S_n := \sum_{i=1}^n T_i$, $n \in \mathbb{N}$, ter $N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(S_n \leq t)$, $t \in [0, \infty)$ – pripadajoči prenovitveni proces.

(a) (20 točk) Določi $P(N_0 = k)$ za cela števila $k \geq 0$.

(b) (5 točk) Določi $P(N_{S_{1000}} = k)$ za cela števila $k \geq 1000$.

Rešitev. Iz prenovitvene lastnosti je $N_{S_{1000}} - 1000 \sim N_0$. Naprej $P(N_0 = k) = P(T_1 = 0, \dots, T_k = 0, T_{k+1} > 0) = p^k(1 - p)$, $k \in \mathbb{N}_0$, torej $N_0 + 1 \sim \text{geom}(1 - p)$. Sledi $N_{S_{1000}} - 999 \sim \text{geom}(1 - p)$.

2. (25 točk) Naročila za izvedenska mnenja o prevzemih prihajajo na neko svetovalo hišo ob prihodnih časih homogenega Poissonovega procesa z intenziteto $\lambda \in (0, \infty)$. Z naročili se v hiši ukvarja skupina, ki začne na posameznem naročilu delati (ga ‘reševati’) takoj, ko prispe, za kar porabi vsakič neodvisno, slučajno mnogo, časa, ki je porazdeljeno absolutno zvezno z gostoto $x \mapsto \alpha e^{-\alpha(x-x_m)} \mathbb{1}_{[x_m, \infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ($x_m \in (0, \infty)$ ter $\alpha \in (0, \infty)$ sta parametra). Če kako naročilo prispe tekom razreševanja tekočega naročila, na katerem delajo, potem je tako novo-prispelo naročilo izgubljeno. Naročila prihajajo neodvisno od tega kako dolgo jih skupina razrešuje/zapira. Določi porazdelitev števila naročil, ki jih skupina uspe končati, ne da bi tekom njihovega razreševanja prispelo novo naročilo (ki je posledično izgubljeno). Ob času $t = 0$ skupina nima odprtih naročil.

Rešitev. Naj bo N omenjeni Poissonov proces, $(T_i)_{i=1}^{\infty}$ njegovi medprihodni časi, $(L_i)_{i=1}^{\infty}$ pa zaporedje količin časov, ki so potrebne za dokončanje naročil. Končno naj bo K število naročil, ki jih skupina uspe ‘opraviti sproti’. Potem je za $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\{K = k\} = \{L_1 \leq T_2, \dots, L_k \leq T_{k+1}, L_{k+1} > T_{k+2}\},$$

in torej zaradi neodvisnosti ter e.p. $P(K = k) = P(L_1 \leq T_2)^k (1 - P(L_1 \leq T_2))$. Torej $K + 1 \sim \text{geom}(1 - P(L_1 \leq T_2))$, kjer je $P(L_1 \leq T_2) = \int_{x_m}^{\infty} dx e^{-\lambda x} \alpha e^{-\alpha(x-x_m)} = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda} e^{-\lambda x_m}$.

3. Vzporedno potekata neodvisna homogena Poissonova procesa N^1 in N^2 . Označimo z $(S_k^i)_{k \in \mathbb{N}_0}$ (λ_i) prihodne čase (intenzivnost) N^i , $i = 1, 2$ (kot vedno: $S_0^1 = S_0^2 = 0$). Nek sistem je ob času $t \in [0, \infty)$ v stanju 0, oz. 1, oz. 2, glede na to ali je $S_{N_t^1}^1 = S_{N_t^2}^2$, $S_{N_t^1}^1 > S_{N_t^2}^2$ ali $S_{N_t^1}^1 < S_{N_t^2}^2$. Naj bo končno M_t skupno število prehodov tega sistema iz stanja 0 v stanje 1 ter iz stanja 2 v stanje 1, do in vključno z časom t , $t \in [0, \infty)$.

- (a) (7 točk) Določi $P(\cup_{t \geq 0} \{0 < S_{N_t}^1 = S_{N_t}^2\})$. V katerem stanju je sistem ob času 0?
- (b) (13 točk) Koliko je M_0 ? Bodi $(J_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje časov skokov procesa M . Določi porazdelitev J_1 , ter $E[J_{k+1} - J_k]$ za $k \in \mathbb{N}$!
- (c) (5 točk) Določi še (s.g.) $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t/t!$

(Brez dokaza lahko pri določitvi $E[J_{k+1} - J_k]$ v (b), ter v (c), upoštevash, da velja za vsak (s.g.) končen čas ustavljanja T , glede na naravno filtracijo $(\mathcal{F}_t^{N_1, N_2})_{t \geq 0}$ bivariatnega procesa (N^1, N^2) /dano z $\mathcal{F}_t^{N_1, N_2} := \sigma(N_s^1, N_s^2 : s \in [0, t])$, $t \in [0, \infty)$ /, krepka lastnost Markova za N^i : $(N_{T+t}^i - N_T^i)_{t \geq 0}$ je homogen Poissonov z intenziteto λ_i neodvisen od $\mathcal{F}_T^{N_1, N_2}$, $i \in \{1, 2\}$.)

Rešitev. (a). (Iz desne zveznosti N^1 ter N^2 sledi merljivost relevantnega dogodka.) Proces N^1 oz. N^2 skoraj gotovo ne skočita ob istem času ($P(\{S_{l_1}^1 = S_{l_2}^2\}) = 0$ za vse $\{l_1, l_2\} \subset \mathbb{N}$ – del izreka o superpoziciji Poissonovih procesov, oz. absolutna zveznost in neodvisnost časov skokov) od koder sledi iz $\cup_{t \geq 0} \{0 < S_{N_t}^1 = S_{N_t}^2\} = \cup_{l_1, l_2=1}^{\infty} \{S_{l_1}^1 = S_{l_2}^2\}$ ter subaditivnosti verjetnosti, da je $P(\cup_{t \geq 0} \{0 < S_{N_t}^1 = S_{N_t}^2\}) = P(\cup_{l_1, l_2=1}^{\infty} \{S_{l_1}^1 = S_{l_2}^2\}) \leq \sum_{l_1=1}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} P(\{S_{l_1}^1 = S_{l_2}^2\}) = 0$. Seveda je ob času 0 proces v stanju 0. (b). Iz desne zveznosti: $M_0 = 0$. Iz navodila naprej sledi, da je (če se, brez vpliva na porazdelitev, znebimo dogodka z verjetnostjo nič, tako da so (vsi pozitivni) prihodni časi N^1 različni od (vseh pozitivnih) prihodnih časov N^2 , in oboji končni ter navzgor neomejeni) sistem spočetka v stanju 0; nato preide v stanje 1 ob prvem prihodnem času N^1 , torej je $J_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$; nato prehaja, najprej v stanje 2, in spet nazaj v stanje 1, ob zaporednih prvih naslednjih prihodih procesa N_2 , in nato N_1 , za kar porabi po navedeni krepki lastnosti Markova, vsakič neodvisno, enako — $\text{Exp}(\lambda_2) \star \text{Exp}(\lambda_1)$ — porazdeljeno, in v povprečju $\lambda_2^{-1} + \lambda_1^{-1}$, mnogo časa. [Da so relevantni slučajni časi res časi ustavljanja glede na naravno filtracijo procesa (N^1, N^2) sledi formalno iz sledečega opažanja (in nato z matematično indukcijo). Naj bo S čas ustavljanja glede na \mathcal{F}^{N^1, N^2} . Potem je za $t \in [0, \infty)$, $\{\inf\{u \geq S : N_u^1 > N_S^1\} \leq t\} = \cup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, t)} \{S \leq r\} \cap \{N_t^1 > N_r^1\}$.](c). Opravka imamo s prenovitvenim procesom z zaostankom; iskana limita je torej enaka $(\lambda_2^{-1} + \lambda_1^{-1})^{-1}$.

4. Naj bo $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e. – s porazdelitveno funkcijo F – p. slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $[0, \infty)$, pri čemer je $F(0) < 1$, F nearitmetična, in s končnim upanjem $\mu := \int x dF(x) < \infty$. Definirajmo: $S_n := \sum_{i=1}^n T_i$, $n \in \mathbb{N}_0$ (seveda, $S_0 = 0$), ter $N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(S_n \leq t)$, $t \in [0, \infty)$ – pripadajoči prenovitveni proces. Fiksirajmo končno $x \in [0, \infty)$, in definirajmo funkcijo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $g(t) := P(S_{N_t+1} - S_{N_t} \leq x)$ za $t \geq 0$, $g(t) = 0$, sicer.

(a) (12 točk) Zapiši prenovitveno enačbo za funkcijo g .

(b) (13 točk) Določi: $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$.

(Lahko privzameš, da je g merljiva.)

Rešitev. Gre za prenovitveno enačbo, ter asimptotiko, porazdelitvene funkcije vsote starosti in presežka procesa N .

(a). Za $t \geq 0$, je $g(t) = P(S_{N_t+1} - S_{N_t} \leq x) = P(S_{N_t+1} - S_{N_t} \leq x, S_1 \leq t) + P(S_{N_t+1} - S_{N_t} \leq x, S_1 > t) = E[P(S_{N_t+1} - S_{N_t} \leq x, S_1 \leq t | S_1)] + P(S_1 \leq x, S_1 > t) = E[(s \mapsto g(t-s)) \circ S_1] + \mathbb{1}_{[0, x]}(t)(F(x) - F(t)) = \int g(t-s)F(ds) + \mathbb{1}_{[0, x]}(t)(F(x) - F(t))$. Torej

$g = g \star F + h$, kjer je $h(t) := \mathbb{1}_{[0,x]}(t)(F(x) - F(t))$, $t \in \mathbb{R}$, merljiva funkcija (produkt merljivih, razlike merljivih, so merljive funkcije, kontante so merljive, indikatorji intervalov (merljivih množic) so merljive, nepadajoče funkcije so merljive). (Merljivost g ter prvi sumand sta sicer formalno posledica ‘leme o pogojevanju’.) (b). Ker je h omejena, merljiva, zvezna skoraj povsod (porazdelitvena funkcija na realni osi ima kvečjemu števno mnogo skokov), s kompaktnim nosilcem, je d.R.i. F je nearitmetična, v posebnem je $F(0) < 1$, g pa lokalno omejena (saj je omejena) in merljiva, Smith da $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \int_0^x (F(x) - F(s)) ds / \mu = \int_{(0,x]} u F(du) / \mu$, kjer zadnja enakost sledi iz Fubinijevega izreka. (Mimogrede, to je konsistentno z rezultatom ki ga poznamo za homogene Poissonove procese; v tem primeru dobimo v limiti $\Gamma(1, \lambda)$ porazdelitev, če je λ intenziteta.)