

# SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 2. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Lahko pišete s svinčnikom.

10. julij 2015

1. Nek študent se je odločil da bo začel varčevati. Njegovo začetno stanje (ob času nič) na varčevalnem računu je nič. Ob prihodnih časih homogenega Poissonovega procesa  $N$  z intenziteto  $\lambda = 2/\text{mesec}$  dobi od svojih staršev žepnino (vsakič vsaj 100 EUR), od katere  $a = 100$  EUR vendarle odmakne, in položi na varčevalni račun (preostalo pa potroši). Na varčevalnem računu se denar obrestuje s konstantno zvezno obrestno mero  $r = 0.2/\text{mesec}$ . Drugih prihodkov (na varčevalni račun) študent nima, denarja z varčevalnega računa (do nadaljnjega) ne dviguje.
- (a) (10 točk) S kolikšno verjetnostjo bo študent v naslednjih  $t_0 = 2$  mesecih prejel žepnino največ trikrat, vendar vsaj enkrat? S kolikšno verjetnostjo pa v tem istem obobju sploh ne bo nobenkrat prejel žepnine?
- (b) (15 točk) Določi matematično upanje stanja na varčevalnem računu študenta po  $t_1 = 1$  letu.

(Obnovimo zvezno obrestovanje (pri konstantni zvezni obrestni meri  $r$ ): znesek  $Z \in [0, \infty)$  naraste v časovnem intervalu  $\Delta \in [0, \infty)$  (intervalu časa znotraj katerega je znesek na računu) na  $Ze^{r\Delta}$ .)

**Rešitev.** (a).  $\text{Pois}(\lambda t_0)(\{1, 2, 3\}) = e^{-\lambda t_0}(\lambda t_0 + (\lambda t_0)^2/2 + (\lambda t_0)^3/6)$ .  $\text{Pois}(\lambda t_0)(\{0\}) = e^{-\lambda t_0}$ . (b). Naj bodo  $(S_i)_{i \geq 1}$  kot običajno prihodni časi  $N$ -ja. Stanje na računu ob času  $t_1$ :  $W = \sum_{i=1}^{N_{t_1}} a e^{r(t_1 - S_i)}$ . Sledi:

$$\mathbb{E}[W] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[W | N_{t_1} = k] \mathbb{P}(N_{t_1} = k) = \sum_{k=1}^{\infty} a k \frac{e^{rt_1} - 1}{rt_1} e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^k}{k!} = a \frac{\lambda}{r} (e^{rt_1} - 1),$$

kjer smo upoštevali (med drugim) lastnost vrstilnih statistik.

2. Naj bo  $N$  homogen Poissonov proces z intenziteto  $\lambda \in (0, \infty)$ .
- (a) (13 točk) Določi  $\mathbb{E}[N_t^2]$  (za  $t \geq 0$ ). Pokaži, da je proces  $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t \geq 0}$  martingal (glede na naravno filtracijo  $\mathcal{F}^N$  procesa  $N$ ).
- (b) (12 točk) Naj bo še  $\theta \in \mathbb{R}$ . Določi  $\mathbb{E}[e^{\theta N_t}]$  (za  $t \geq 0$ ). Pokaži da je tudi proces  $(e^{\theta N_t - \lambda t(e^\theta - 1)})_{t \geq 0}$  martingal (glede na naravno filtracijo  $\mathcal{F}^N$  procesa  $N$ ).
- ( $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s, s \in [0, t])$ ,  $t \in [0, \infty)$ .) **Namig:** V točki (a), oz. (b), bo smiselno določiti (za  $0 \leq s \leq t < \infty$ ) pogojno upanje  $\mathbb{E}[(N_t - \lambda t)^2 - \lambda t | \mathcal{F}_s^N]$ , oz.  $\mathbb{E}[e^{\theta N_t - \lambda t(e^\theta - 1)} | \mathcal{F}_s^N]$ .

**Rešitev.** Naj bo  $N$  homogen Poissonov proces z intenziteto  $\lambda \in (0, \infty)$  glede na filtracijo  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  (lahko vzamemo naravno filtracijo). Merljivosti so neposredno razvidne. (a). Integrabilnost je jasna, ker ima Poissonova porazdelitev končen drugi moment:  $\mathbb{E}[N_t^2] = \lambda t + (\lambda t)^2$ ,  $t \in [0, \infty)$ . Računamo (upoštevamo da je  $N_s$   $\mathcal{F}_s$ -merljiva):  $\mathbb{E}[(N_t - \lambda t)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(N_t - N_s + N_s - \lambda t)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(N_t - N_s)^2 | \mathcal{F}_s] + 2(N_s - \lambda t)\mathbb{E}[N_t - N_s | \mathcal{F}_s] + (N_s - \lambda t)^2$ , s.g. Iz  $N_t - N_s \sim \text{Pois}(\lambda(t-s))$  in neodvisnosti  $N_t - N_s$  od  $\mathcal{F}_s$  dobimo  $\mathbb{E}[(N_t - N_s)^2 | \mathcal{F}_s] = (\lambda(t-s))^2 + \lambda(t-s)$  ter  $\mathbb{E}[N_t - N_s | \mathcal{F}_s] = \lambda(t-s)$  s.g.; torej  $\mathbb{E}[(N_t - \lambda t)^2 - \lambda t | \mathcal{F}_s] = (\lambda(t-s))^2 + \lambda(t-s) + 2(N_s - \lambda t)\lambda(t-s) + (N_s - \lambda t)^2 - \lambda t = (N_s - \lambda s)^2 - \lambda s$  s.g. (b). Velja  $\mathbb{E}e^{\theta N_t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{\theta k} e^{-\lambda t} = e^{\lambda t(e^\theta - 1)}$ ,  $t \in [0, \infty)$ , v posebnem imamo integrabilnost. Končno je s.g.  $\mathbb{E}[e^{\theta N_t - \lambda t(e^\theta - 1)} | \mathcal{F}_s] = e^{\theta N_s - \lambda s(e^\theta - 1)} \mathbb{E}[e^{\theta(N_t - N_s)} | \mathcal{F}_s] = e^{\theta N_s} e^{\lambda(-t+s)(e^\theta - 1)} = e^{\theta N_s - \lambda s(e^\theta - 1)}$ .

3. Dan je Poissonov proces  $N$  s funkcijo intenzitete  $\rho(t) = \frac{1}{1+Vt^2}$ ,  $t \in [0, \infty)$ .
- (a) (13 točk) Za  $t \geq 1$ , ter  $n \in \mathbb{N}_0$ , določi  $\mathbb{P}(N_t = n)$ .
- (b) (12 točk) Določi še porazdelitev slučajne spremenljivke  $N_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} N_t$ . Ali je  $N_\infty < \infty$  s.g.?

**Rešitev.**  $N_t \sim \text{Pois}(\int_0^t \frac{1}{1+Vs^2} ds)$ , torej  $\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(2-1/t)^n}{n!} e^{-(2-1/t)}$ . Naprej je po dominirani konvergenci  $\mathbb{P}(N_\infty = n) = \frac{2^n}{n!} e^{-2}$ , se pravi  $N_\infty \sim \text{Pois}(2)$ , in v posebnem  $N_\infty < \infty$  s.g.

4. Naj bodo  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  n.e. – s porazdelitveno funkcijo  $F$  – p. slučajne spremenljivke z vrednostmi v  $[0, \infty)$ , končnim upanjem  $\mu := \mathbb{E}T_1 < \infty$ ,  $F(0) < 1$ ;  $S_n := \sum_{i=1}^n T_i$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , ter  $N_t := \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}(S_n \leq t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , pripadajoči prenovitveni proces.
- (a) (13 točk) Pokaži da je za  $t \in [0, \infty)$ ,  $\mathbb{E}[N_t] - \frac{t}{\mu} = \frac{\mathbb{E}[E_t]}{\mu} - 1$ , kjer je  $E_t = S_{N_t+1} - t$  presežek procesa  $N$  ob času  $t$ . Razloži še zakaj je  $\mu > 0$ ! **Namig:** Waldova identiteta za čas ustavljanja  $N_t + 1$  (glede na katero filtracijo (že)!?).
- (b) (12 točk) Sklepaj, da je  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \left( \mathbb{E}[N_t] - \frac{t}{\mu} \right) \geq -1$ . Najdi primer prenovitvenega procesa pri katerem je  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \left( \mathbb{E}[N_t] - \frac{t}{\mu} \right) = -1$ .

**Rešitev.** (a). Ker je  $N_t + 1$  čas ustavljanja glede na naravno filtracijo zaporedja  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  (namreč  $\{N_t + 1 \leq n\} = \{N_t < n\} = \Omega \setminus \{N_t \geq n\} = \Omega \setminus \{S_n \leq t\} \in \sigma(T_1, \dots, T_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ), in so  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  e.p. nenegativne slučajne spremenljivke,  $T_{i+1}$  neodvisna od  $\sigma(T_1, \dots, T_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , sledi iz Waldove identitete:  $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N_t+1} T_i] = \mathbb{E}[N_t + 1]\mathbb{E}[T_1] = (\mathbb{E}[N_t] + 1)\mu$ . Po drugi strani je  $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N_t+1} T_i] = \mathbb{E}S_{N_t+1} = \mathbb{E}E_t + t$ , od koder z malo preurejanja takoj rezultat ( $\mu > 0$ , ker je  $F(0) < 1$ , in torej  $T_1 > 0$  s pozitivno verjetnostjo). (b). Prva izjava sledi iz  $E_t \geq 0$ , ko vzamemo  $\liminf$  na obeh straneh enakosti iz (a). Za iskani primer, fiksirajmo  $a \in (0, \infty)$ , in naj bo  $T_i = a$  za vsak  $i \in \mathbb{N}$ . Tedaj je  $N_t = \lfloor t/a \rfloor$ ,  $t \in [0, \infty)$ ,  $\mu = a$ , in je  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \left( \mathbb{E}[N_t] - \frac{t}{\mu} \right) = -1$ , ker je  $\lim_{\rho \uparrow 1} \left( \lfloor \frac{ka + \rho a}{a} \rfloor - \frac{ka + \rho a}{a} \right) = -1$  za vsak  $k \in \mathbb{N}$  (pri poljubno velikih  $t$ -jih, smo poljubno blizu  $-1$  s to razliko).