

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 1. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Lahko pišete s svinčnikom.

23. junij 2015

1. Na neki državni banki je bila vodstvena ekipa ravnokar nastavljena za dobo (mandat dolžine) $t_0 = 4$ let. Ob prihodnih časih homogenega Poissonovega procesa N z intenziteto $\lambda = 2/\text{leto}$, se jim ponudi priložnost, da banko oškodujejo za vsoto denarja, ki je vsakič neodvisna (neodvisna tudi od N) in porazdeljena eksponentno s povprečno vrednostjo $m_0 = 1$ mio EUR. Vodstvena ekipa izkoristi vsako priložnost za oškodovanje banke, vsakič jo pri tem z verjetnostjo $p = 1\%$, neodvisno, neodvisno tudi od N in od višin oškodovanj, zasačijo nadzorniki. /Tudi če je vodstvena ekipa pri dotičnem oškodovanju zasačena, je banka še vedno oškodovana, in ekipa lahko nadaljuje z nadaljnjimi oškodovanji (sodni postopki so dolgotrajni ...)!/
 - (a) (10 točk) Kolikšna je verjetnost, da ne bo vodstvena ekipa nikoli zasačena pri oškodovanju (s strani nadzornikov, v času njihovega mandata)?
 - (b) (7 točk) Kolikšno je matematično upanje skupne vrednosti vseh oškodovanj banke s strani vodstvene ekipe v času njihovega mandata?
 - (c) (8 točk) Kolikšno pa je, *pogojno na dogodku iz (a)*, matematično upanje skupne vrednosti vseh oškodovanj banke s strani vodstvene ekipe v tem istem obdobju?

Namig za (b) ter (c): Waldova identiteta.

Rešitev. Omenjen pojav lahko torej modeliramo s Poissonovim procesom štetja N z intenziteto λ , z zaporedjem $Y = (Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n.e.-Exp($1/m_0$)-p. slučajnih spremenljivk ter zaporedjem $O = (O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n.e.-Ber(p)-p. slučajnih spremenljivk, kjer N_t predstavlja število oškodovanj do (vključno z) časom t , Y_i je višina i -tega oškodovanja, O_i pa 1 oz. 0 če pri i -tem oškodovanju nadzorniki zasačijo vodstveno ekipo ($i \in \mathbb{N}$). N , O in Y so med seboj neodvisni procesi.

(a). Gre za markiranje procesa N z označbami O . Proces oškodovanj, ki so zasačena N^1 je homogen Poissonov s parametrom $p\lambda$, in neodvisen od procesa oškodovanj, ki niso zasačena, N^2 – ta je spet homogen Poissonov s parametrom $(1 - p)\lambda$. Če z A označimo dogodek da vodstvena ekipa ne bo nikoli zasačena pri oškodovanju, potem je $A = \{N_{t_0}^1 = 0\}$, torej $P(A) = e^{-\lambda p t_0} = e^{-0.08}$. Upoštevali smo da je $N_{t_0}^1 \sim \text{Pois}(p\lambda t_0)$.

(b). Waldova identiteta dá takoj nepogojeno upanje $E[\sum_{i=1}^{N_{t_0}} Y_i] = E[N_{t_0}]E[Y_1] = \lambda t_0 m_0 = 8$ mio EUR, saj je N_{t_0} slučajen (merljiv) čas neodvisen od zaporedja Y , ki sestoji iz enako porazdeljenih (s.g.) nenegativnih slučajnih spremenljivk.

(c). Iščemo še $E[\sum_{i=1}^{N_{t_0}} Y_i | A] = E[\sum_{i=1}^{N_{t_0}^2} Y_i | N_{t_0}^1 = 0]$. Ker so N^1 , N^2 in Y skupno neodvisni, je najprej $E[\sum_{i=1}^{N_{t_0}^2} Y_i | N_{t_0}^1 = 0] = E[\sum_{i=1}^{N_{t_0}^2} Y_i]$, nato pa še po Waldovi identiteti

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N_{t_0}^2} Y_i] = \mathbb{E}[N_{t_0}^2] \mathbb{E}[Y_1] = (1-p)\lambda t_0 m_0 = 7.92 \text{ mio EUR. Upoštevati smo da je } N_{t_0}^2 \sim \text{Pois}((1-p)\lambda t_0).$$

2. Dan je homogen Poissonov proces z intenziteto $\lambda \in (0, \infty)$. Naj bo $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje njegovih medprihodnih časov. Definirajmo

$$\tilde{T}_i = T_{2i-1} + T_{2i}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

- (a) (10 točk) Določi porazdelitev slučajnih spremenljivk \tilde{T}_i . Ali so neodvisne? Zakaj (ne)?
- (b) (15 točk) Naj bo $\tilde{N}_t = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}(\tilde{S}_i \leq t)$, $t \in [0, \infty)$, kjer je $\tilde{S}_i = \sum_{j=1}^i \tilde{T}_j$, $i \in \mathbb{N}$. Določi s.g. limito

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{N}_t / t.$$

Rešitev. Zaporedje \tilde{T} je zaporedje n.e.- $\Gamma(2, \lambda)$ -p. slučajnih spremenljivk, iz lastnosti homogenih Poissonovih procesov: $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ so n.e.- $\text{Exp}(\lambda)$ -p. slučajne spremenljivke; sledi (i) $\text{Exp}(\lambda) \star \text{Exp}(\lambda) = \Gamma(2, \lambda)$ (konvolucija); in (ii) $((T_{2i-1}, T_{2i}))_{i \in \mathbb{N}}$ je tudi zaporedje neodvisnih vektorjev, \tilde{T}_i pa (merljiva) funkcija (T_{2i-1}, T_{2i}) , $i \in \mathbb{N}$ (od koder neodvisnost \tilde{T}_i , $i \in \mathbb{N}$). \tilde{N} je pripadajoči prenovitveni proces, s.g. limita je tedaj enaka $\frac{1}{\int x \Gamma(2, \lambda)(dx)} = \frac{\lambda}{2}$.

3. Naj bo $a \in (0, \infty)$. Poissonov proces N ima funkcijo intenzitete $\rho(t) = 2at$, $t \in [0, \infty)$.
- (a) (15 točk) Za $0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty$, določi skupno verjetnostno masno funkcijo slučajnega vektorja (N_{t_1}, N_{t_2}) , natančneje, izrazi $\mathbb{P}(N_{t_1} = n, N_{t_2} = m)$ za $\{n, m\} \subset \mathbb{N}_0$.
- (b) (10 točk) Izračunaj še $\mathbb{P}(N_1 \in \{0, 1\}, N_2 \in \{1, 2\})$.

Rešitev. (a). Za $\{n, m\} \subset \mathbb{N}_0$, $m \geq n$, je $\mathbb{P}(N_{t_1} = n, N_{t_2} = m) = \mathbb{P}(N_{t_1} = n, N_{t_2} - N_{t_1} = m - n) = \frac{(at_1^2)^n}{n!} \frac{(a(t_2^2 - t_1^2))^{m-n}}{(m-n)!} e^{-at_2^2}$; 0 sicer. (b). Računamo (za $t_1 = 1$, $t_2 = 2$):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^1 \sum_{m=1}^2 \frac{(at_1^2)^n}{n!} \frac{(a(t_2^2 - t_1^2))^{m-n}}{(m-n)!} e^{-at_2^2} \\ &= \left[a(t_2^2 - t_1^2) + \frac{(a(t_2^2 - t_1^2))^2}{2} + at_1^2(1 + a(t_2^2 - t_1^2)) \right] e^{-at_2^2} = e^{-4a} a \left[4 + \frac{15a}{2} \right]. \end{aligned}$$

4. (25 točk) Naj bo $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e.p. slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $[0, \infty)$, $\mu := \mathbb{E}T_1 < \infty$, $\sigma^2 := \text{var}(T_1)$. Definirajmo še $S_n := \sum_{i=1}^n T_i$, $n \in \mathbb{N}_0$; ter $N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(S_n \leq t)$, $t \in [0, \infty)$ – pripadajoči prenovitveni proces. Označimo končno z $A_t := t - S_{N_t}$ starost, ter z $R_t := \int_0^t A_s ds$ kumulativno starost, procesa N ob času t , $t \in [0, \infty)$. Določi (s.g.) $\lim_{t \rightarrow \infty} R_t / t$ in tudi $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}R_t / t$ (izrazi ju z μ ter σ^2)!

Rešitev. Podobno kot s presežkom (naloge # 39). Naj bo $\bar{R}_i := \int_{S_{i-1}}^{S_i} (t - S_i) dt = T_i^2/2$, $i \in \mathbb{N}$. Teda j velja:

$$\sum_{i=1}^{N_t} \bar{R}_i \leq R_t \leq \sum_{i=1}^{N_t+1} \bar{R}_i, \quad t \in [0, \infty).$$

Evidentno so $(\bar{R}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n.e.p. slučajne spremenljivke; $\bar{R}_{i+1} \perp \sigma(T_1, \dots, T_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Ker je še $\mu < \infty$, nagrade nenegativne, sledi iz izreka o prenovitvah z nagradami da sta obe limiti enaki $\mathbb{E}[T_1^2]/(2\mathbb{E}T_1) = (\sigma^2 + \mu^2)/(2\mu)$.