

# SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 1. kolokvij

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Lahko pišete s svinčnikom.

21. april 2015

1. (25 točk) Naj bo  $N$  homogen Poissonov proces z intenziteto  $\lambda \in (0, \infty)$ . Izračunaj:

$$E[S_1 | N_1 \geq 2],$$

kjer je  $S_1$  prvi prihodni čas  $N$ -ja.

**Rešitev.** Na dogodku  $N_1 \geq 2$ , je gotovo  $0 < S_1 < 1$ . Naprej, za  $x \in (0, 1)$ , imamo preživetveno funkcijo:

$$\begin{aligned} P(S_1 > x | N_1 \geq 2) &= P(N_x = 0, N_1 - N_x \geq 2) / P(N_1 \geq 2) \\ &= P(N_x = 0) P(N_1 - N_x \geq 2) / P(N_1 \geq 2) \\ &= P(N_x = 0) P(N_{1-x} \geq 2) / P(N_1 \geq 2) \\ &= P(N_x = 0) (1 - P(N_{1-x} < 2)) / (1 - P(N_1 < 2)) \\ &= \frac{e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda(1-x)} - \lambda(1-x)e^{-\lambda(1-x)})}{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}}. \end{aligned}$$

Sledi:

$$E[S_1 | N_1 \geq 2] = \int_0^1 P(S_1 > x | N_1 \geq 2) dx = \frac{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \lambda^2 e^{-\lambda} / 2}{\lambda(1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda})}.$$

[Mimogrede, lahko bi računali tudi s skupno verjetnostno gostoto  $(S_1, S_2)$ , ki smo jo ravno na dan kolokvija izpeljali na vajah za splošen Poissonov proces (z zvezno funkcijo intenzitete). Saj je vendar:

$$E(S_1 | N_1 \geq 2) = E[S_1 | S_2 \leq 1] = \int_0^1 ds_1 \int_{s_1}^1 ds_2 \lambda^2 e^{-\lambda s_2} s_1 / \int_0^1 ds_1 \int_{s_1}^1 \lambda^2 e^{-\lambda s_2},$$

od koder dobimo takoj želeni rezultat.]

2. Asistent 'nagradi' hitro reševanje nalog s tem da konča vaje bodisi ob preteku  $T = 90$  min, bodisi po rešeni tretji zaporedni nalogi, katerikoli od teh dveh časov pride prej. Dolžine reševanj nalog so med sabo neodvisne in enako, eksponentno, porazdeljene. Povprečen čas reševanja posamezne naloge znaša  $t_0 = 30$  minut. Končno, če je dobre volje, in kadar so s študenti ob preteku 90 minut ravno *sredi* reševanja kake naloge, asistent podaljša vaje dokler ne rešijo tekoče naloge, oz. največ za  $\Delta = 5$  minut, spet katerikoli od teh časov pride prej. Dobre volje je asistent, neodvisno od dolžine reševanj nalog, z verjetnostjo  $p = 5\%$ .

- (a) (10 točk) Koliko znaša verjetnost da bo asistent z vajami končal strogo prej kot v 90 minutah?
- (b) (5 točk) Kolikšna pa je verjetnost, da bodo z reševanjem kake naloge končali točno ob preteku 90 minut?
- (c) (10 točk) Pogojno na dogodku, da so ob preteku 90 minut študentje in asistent sredi reševanja neke naloge, ter da je asistent tisti dan dobre volje, kolikšna je verjetnost, da bodo nalogo, ki jo trenutno rešujejo, še pravočasno rešili (znotraj 'podaljška')?

**Rešitev.** Čase ko končajo z reševanjem kake naloge, si lahko mislimo kot prihodne čase v homogenem Poissonovem procesu s parametrom  $\lambda = 1/t_0$  (ki ga potem namara še ustavimo ob času  $T$ , oz.  $S_3$  oz.  $T + \Delta$ ). Označimo ta proces z  $N$ , njegove prihodne čase pa z  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ . (a).  $P(S_3 < T) = P(S_3 \leq T) = P(N_T \geq 3) = 1 - P(N_T \leq 2) = 1 - e^{-T/t_0}(1 + T/t_0 + \frac{(T/t_0)^2}{2})$ , ker je porazdelitev  $S_3 \sim \Gamma(3, \lambda)$  (absolutno) zvezna, in  $N_T \sim \text{Pois}(\lambda T)$ . (b).  $P(S_k = T) = 0$ , ker je porazdelitev  $S_k$  absolutno zvezna, za vsak  $k \in \mathbb{N}$ . Torej je tudi zahtevana verjetnost enaka nič ( $P(\cup_{k=1}^3 \{S_k = T\}) = 0$ ; relevanten dogodek pa je ravno enak  $\cup_{k=1}^3 \{S_k = T\}$ ). (c). Dogodek na katerega pogojujemo je  $B := \{S_3 > T\} \cap \{S_1 \neq T\} \cap \{S_2 \neq T\} \cap \{\text{asistent je dobre volje}\}$ , zanima pa nas  $P(S_{N_T+1} - T \leq \Delta | B)$ . Ker je dogodek  $\{\text{asistent je dobre volje}\}$  sploh neodvisen od  $N$ , je vseeno če  $B$  zamenjamo z  $A := \{S_3 > T\} \cap \{S_1 \neq T\} \cap \{S_2 \neq T\}$ . Naprej,  $S_{N_T+1} - T$  ni nič drugega kot prvi prihodni čas v procesu prirastkov  $N$ -ja po času  $T$ , pa je zato po lastnosti Markova neodvisen od  $A \in \mathcal{F}_T^N$ , njegova porazdelitev pa enaka porazdelitvi  $S_1$ . Sledi  $P(S_{N_T+1} - T \leq \Delta | B) = P(S_{N_T+1} - T \leq \Delta) = P(S_1 \leq \Delta) = 1 - e^{-\Delta/t_0}$ .

3. Marko, Cene in Ana se odločajo kam iti na počitnice. Predloge nizajo neodvisno, vsak ob prihodnih časih svojega homogenega Poissonovega procesa, z intenzitetami  $\lambda^M$ ,  $\lambda^C$  oz.  $\lambda^A$ . Zbrali bodo šest predlogov in se nato odločili.
- (a) (9 točk) Kakšna je porazdelitev in kolikšno upanje časa do konca zbiranja predlogov?
- (b) (8 točk) Kakšna je verjetnost da bo Marko podal dva predloga, preden bo enako zmogel Cene, Ana pa sploh nobenega?
- (c) (8 točk) Kakšna je verjetnost, da se bodo odločali na podlagi treh predlogov Marka, dveh Ane, in enega predloga Ceneta?

**Rešitev.** Kot običajno markiramo Poissonov proces s skupno intenziteto ... Sledi (z nujno argumentacijo), da ima čas do konca zbiranja predlogov Gamma porazdelitev s parametroma 6 in  $\lambda^M + \lambda^C + \lambda^A$ , katere upanje je  $6/(\lambda^M + \lambda^C + \lambda^A)$ . Prva željena verjetnost je (z nujno argumentacijo):

$$\left(\frac{\lambda^M}{\lambda^M + \lambda^C + \lambda^A}\right)^2 + \binom{2}{1} \left(\frac{\lambda^M}{\lambda^M + \lambda^C + \lambda^A}\right)^2 \frac{\lambda^C}{\lambda^M + \lambda^C + \lambda^A}.$$

Druga željena verjetnost je pač:

$$\binom{6}{3, 2, 1} \left(\frac{\lambda^M}{\lambda^M + \lambda^C + \lambda^A}\right)^3 \left(\frac{\lambda^A}{\lambda^M + \lambda^C + \lambda^A}\right)^2 \left(\frac{\lambda^C}{\lambda^M + \lambda^C + \lambda^A}\right).$$

4. (25 točk) Vzporedno potekata dva neodvisna homogena Poissonova procesa  $N^1$  in  $N^2$  z intenzitetama, prvi  $\lambda$ , drugi  $\mu$ . Določite porazdelitev števila prihodov prvega procesa strogo po  $k$ -tem prihodu procesa  $N^2$  ter strogo pred  $(k+m)$ -tem prihodom procesa  $N^2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  (nič-ti prihod  $N^2$  je ob času nič). **Namig:** Rešitev za  $k=0$  poznaš. Sedaj utemelji zakaj je ta porazdelitev neodvisna od  $k$ !

**Rešitev.** Kar se porazdelitve tiče, je vseeno če si mislimo en sam homogen Poissonov proces z intenziteto  $\lambda + \mu$ , markiran z 1 oz. 2, z verjetnostma  $\lambda/(\lambda + \mu)$  oz.  $\mu/(\lambda + \mu)$ . Prihodi markirani z 1 potem tvorijo homogen Poissonov proces z intenziteto  $\lambda$ , neodvisen od prihodov markiranih z 2, ki tvorijo homogen Poissonov proces z intenziteto  $\mu$ . Naj bo  $l \in \mathbb{N}_0$ .

Zanima nas verjetnost, da bo med  $k$ -to in  $k+m$ -to markacijo z 2, prišlo do natanko  $l$  markacij z 1. Iz krepke lastnosti Markova za slučajne sprehode, na primer, sledi, da je vseeno če vzamemo  $k=0$ . Res. Naj bo  $(Z_i)_{i=1}^\infty$  zaporedje markacij. Naj bo  $L$  številka  $k$ -te zaporedne markacije z 2, kar je čas ustavljanja glede na naravno filtracijo procesa  $Z$ , ki je proces prirastkov enolično določenega slučajnega procesa  $W$  na  $\mathbb{Z}$ , ki začne v 0 (in z isto naravno filtracijo). Opazimo da je  $L < \infty$  s.g., in brez izgube splošnosti (vpliva na porazdelitev) z gotovostjo. Potem ima proces prirastkov inkrementalnega procesa  $(W_{L+i} - W_L)_{i=0}^\infty$ , ki je ravno zaporedje  $(Z_{L+i})_{i \in \mathbb{N}}$ , isto porazdelitev kot proces prirastkov  $W$ , ki je zaporedje  $(Z_i)_{i=1}^\infty$ . Alternativno se lahko skličemo takoj (brez obvoda na slučajne sprehode) na krepko lastnost Markova za zaporedja n.e.p. slučajnih spremenljivk (na koncu, je to ena in ista reč).

Želena verjetnost je potem verjetnost da bomo v  $m+l$  markacijah videli natanko  $m$  dvojok,  $l$  enk, od tega zadnjo dvojko:

$$\binom{m+l-1}{l} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^l \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{m-1} \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right),$$

negativna binomska porazdelitev.