

Waldova identiteta (v relativni splošnosti)

Matija Vidmar

10. april 2018

Trditev. Verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ je opremljen s filtracijo $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ v diskretnem času. Dano je zaporedje slučajnih spremenljivk $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ z vrednostmi v $[-\infty, \infty]$, za katere velja da je X_{i+1} neodvisna od $\mathcal{F}_i$ za vse $i \in \mathbb{N}_0$. Končno naj bo T čas ustavljanja glede na filtracijo $\mathcal{F}$. Tedaj je

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^T X_i \right] = \mathbb{E}[T] \mathbb{E}[X_1] \quad (1)$$

in sicer

- (i) ko je $X_i \geq 0$ s.g. in $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_1]$ za vse $i \in \mathbb{N}$ (v posebnem če so $(X_i)_{i=1}^\infty$ enako porazdeljene in $X_1 \geq 0$ s.g.);
- (ii) ter tudi če so $(X_i)_{i=1}^\infty$ enako porazdeljene in je $\mathbb{E}[T] < \infty$ ter $\mathbb{E}[X_1^+] \wedge \mathbb{E}[X_1^-] < \infty$.

Tu je del izjave, da je (v primerih (i) in (ii)) verjetnost dogodka na katerem vsota $\sum_{i=1}^T X_i$ ni definirana (bodisi, ker je za kak $i \in \{1, \dots, T\} \cap \mathbb{N}$, $X_i = \infty$ in hkrati za kak (seveda drug) $i \in \{1, \dots, T\} \cap \mathbb{N}$, $X_i = -\infty$, bodisi ker je sicer $T = \infty$ in delne vsote vrste $\sum_{i=1}^T X_i$ ne konvergirajo v $[-\infty, \infty]$) enaka nič; na izrednem dogodku na katerem vsota ni definirana jo postavimo (arbitrarno) na 0.

Opombe.

- (a) Velja $\sum_{i=1}^N X_i = 0$ na $\{N = 0\}$, ter $\sum_{i=1}^N X_i = \sum_{i=1}^\infty X_i$ na $\{N = \infty\}$, seveda $\sum_{i=1}^N X_i = \sum_{i=1}^n X_i$ na $\{N = n\}$ za $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Po dogovoru je $0 \cdot \infty = 0$.
- (c) Poseben primer 1. Če je $(\mathcal{G}$ -merljiv) slučajen čas $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ neodvisen od vsake slučajne spremenljivke iz zaporedja $(X_i)_{i=1}^\infty$, je konstantna filtracija $\mathcal{F}_n = \sigma(T)$ (za vse $n \in \mathbb{N}_0$) že taka da je X_{i+1} neodvisna od $\mathcal{F}_i$ za vse $i \in \mathbb{N}_0$, T pa je njen čas ustavljanja!
- (d) Poseben primer 2. Če je T čas ustavljanja glede na naravno filtracijo $\mathcal{F}^X$ procesa $(X_i)_{i=1}^\infty$ (kjer je po definiciji $\mathcal{F}_0^X = \{\emptyset, \Omega\}$), kateri sestoji iz neodvisnih slučajnih spremenljivk, je spet X_{i+1} neodvisna od $\mathcal{F}_i^X$ za vse $i \in \mathbb{N}_0$.
- (e) Primer (ii) moremo ob dodatni predpostavki da je X_i integrabilna ter $\mathcal{F}_i$ -merljiva za vsak $i \in \mathbb{N}$ dokazati s teorijo martingalov. V tem primeru iz predpostavk namreč sledi da sta $(\sum_{i=1}^n X_i - n\mathbb{E}X_1)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ter $(\sum_{i=1}^n |X_i| - n\mathbb{E}|X_1|)_{n \in \mathbb{N}_0}$ $\mathcal{F}$ -martingala. Iz izreka o opcijskem vzorčenju sledi za vsak $M \in \mathbb{N}$, za omejen čas ustavljanja $M \wedge T$, da je $\mathbb{E} \sum_{i=1}^{M \wedge T} |X_i| = \mathbb{E}[M \wedge T] \mathbb{E}|X_1|$, in zato iz monotone konvergence (ko $M \rightarrow \infty$) $\mathbb{E} \sum_{i=1}^T |X_i| = \mathbb{E}[T] \mathbb{E}|X_1| < \infty$, ter $\mathbb{E} \sum_{i=1}^{M \wedge T} X_i = \mathbb{E}[M \wedge T] \mathbb{E}X_1$ in torej iz dominirane konvergence (ko $M \rightarrow \infty$) (1).
- (f) Če predpostavko da je T čas ustavljanja glede na filtracijo $\mathcal{F}$, zamenjamo s predpostavkama $(\bullet)$ da je X zaporedje, ki je $\mathcal{F}_\infty$ -merljivo, ter $(\bullet\bullet)$ da je T slučajen čas, se pravi $\mathcal{G}/2^{\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}}$ -merljiva preslikava, ki je randomiziran čas ustavljanja glede na $\mathcal{F}$: $\mathbb{P}(T \leq t | \mathcal{F}_\infty) = \mathbb{P}(T \leq t | \mathcal{F}_t)$ s.g. ("dogodek $\{T \leq t\}$ zavisi od $\mathcal{F}_\infty$ samo skozi $\mathcal{F}_t$ ") za vsak $t \in \mathbb{N}_0$ — potem obveljata enaka zaključka. Res je (glej dokaz!) $T \wedge M$ še vedno randomiziran čas ustavljanja za vsak $M \in \mathbb{N}$; in še vedno je $\mathbb{E}[X_i \mathbb{1}(T \geq i)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i \mathbb{1}(T \geq i) | \mathcal{F}_\infty]] = \mathbb{E}[X_i \mathbb{E}[\mathbb{1}(T \geq i) | \mathcal{F}_\infty]] = \mathbb{E}[X_i \mathbb{E}[\mathbb{1}(T \geq i) | \mathcal{F}_{i-1}]] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{P}(T \geq i)$ za vse $i \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Najprej (i). Ker je $X_i \geq 0$ s.g. za vse $i \in \mathbb{N}$ je vsota $\sum_{i=1}^T X_i$ s.g. dobro definirana, skupaj z vsemi relevantnimi upanji, kar je dovolj. Naprej, ker je za vsak $M \in \mathbb{N}$, $T \wedge M$ tudi $\mathcal{F}$ -čas ustavljanja, zavoljo (a), in zaradi monotone konvergence, lahko brez škode za splošnost privzamemo da je T omejen, v posebnem končen. Tedaj imamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^T X_i \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{1}(T = n) \sum_{i=1}^n X_i \right) \right], \text{ zaradi (a), (b) in ker je } T < \infty \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}(T = n) X_i \right) \right], \text{ zaradi (b)} \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n=i}^{\infty} \mathbb{1}(T = n) X_i \right) \right], \text{ Tonellijev izrek} \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(X_i \sum_{n=i}^{\infty} \mathbb{1}(T = n) \right) \right], \text{ zaradi (b)} \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbb{1}(T \geq i) \right], \text{ ker je } \sum_{n=i}^{\infty} \mathbb{1}(T = n) = \mathbb{1}(T \geq i), \text{ saj je } T < \infty \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_i \mathbb{1}(T \geq i)], \text{ monotona konvergenca in linearnost} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_i] \mathbb{P}(T \geq i), \text{ ker je } \{T \geq i\} = \Omega \setminus \{T \leq i-1\} \in \mathcal{F}_{i-1} \perp_{\mathbb{P}} X_i \text{ za vse } i \in \mathbb{N} \\
&= \mathbb{E}[X_1] \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq i), \text{ zaradi (b) in } \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_1] \text{ za vse } i \in \mathbb{N} \\
&= \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[T], \text{ po pravkar dokazanem (z } X_i = 1 \text{ za vse } i \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

(Vidimo, da razen nenegativnosti, zadošča npr. privzeti da je $\mathbb{E}[X_i \mathbb{1}(T \geq i)] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{P}(T \geq i)$ za vse $i \in \mathbb{N}!!$)

(ii). Ker so $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ enako porazdeljene, so tudi $(X_i^+)_{i=1}^{\infty}$ in $(X_i^-)_{i=1}^{\infty}$ enako porazdeljene, ter nenegativne. Naprej je še vedno X_{i+1}^+ neodvisna od $\mathcal{F}_i$ za vsak $i \in \mathbb{N}$. Podobno za X_{i+1}^- . Iz dela (i) torej takoj sledi:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^T X_i^+ \right] = \mathbb{E}[T] \mathbb{E}[X_1^+] \text{ ter } \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^T X_i^- \right] = \mathbb{E}[T] \mathbb{E}[X_1^-].$$

Iz $(\sum_{i=1}^T X_i)^{\pm} \leq \sum_{i=1}^T X_i^{\pm}$ zaključimo, da je $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^T X_i]$ dobro definirano, saj je $\mathbb{E}[T] < \infty$ in je $\mathbb{E}[X_1]$ dobro definirano. (Ker je $\mathbb{E}X_1^+ < \infty$ oz. $\mathbb{E}X_1^- < \infty$, je najprej tudi vsota $\sum_{i=1}^n X_i$ dobro definirana za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ s.g., ker je $X_i^+ < \infty$ za vse $i \in \mathbb{N}$ oz. $X_i^- < \infty$ za vse $i \in \mathbb{N}$ s.g.) Končno dasta linearnost in definicija upanja:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^T X_i \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^T X_i^+ \right] - \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^T X_i^- \right] = \mathbb{E}[T](\mathbb{E}[X_1^+] - \mathbb{E}[X_1^-]) = \mathbb{E}[T] \mathbb{E}[X_1]. \quad \square$$