

Prenovitev z nagradami

Matija Vidmar

15. maj 2018

Naj bodo $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n.e.p. z vrednostmi v $[0, \infty)$, končnim upanjem μ , porazdelitveno funkcijo F , $F(0) < 1$; N pripadajoč prenovitveni proces. Naprej naj bo $R = (R_t)_{t \geq 0}$ proces z zveznim časom z vrednostmi v $[-\infty, \infty]$ (proces "akumuliranih nagrad").

Trditev. Naj ima R vrednosti v $[0, \infty]$. Denimo, da obstaja $(\hat{R}_i)_{i \in \mathbb{N}}$, zaporedje enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $[0, \infty]$, da velja:

$$\sum_{i=1}^{N_t} \hat{R}_i \leq R_t \leq \sum_{i=1}^{N_t+1} \hat{R}_i, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (1)$$

Potem imamo (kjer je $\nu := \mathbb{E}\hat{R}_1$):

- (a) Če so $(\hat{R}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (paroma) neodvisne, je s.g. (natančneje, zunaj množice z verjetnostjo nič¹) $\lim_{t \rightarrow \infty} R_t/t = \nu/\mu$.
- (b) Če je $\hat{R}_{n+1}$ neodvisna od $\sigma(T_1, \dots, T_n)$ za vse $n \in \mathbb{N}$, je $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}R_t/t = \nu/\mu$.

Opombe.

1. Glavni ideji dokaza: (a): krepki zakon velikih števil (dvakrat; za (paroma; Etemadi) neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke *in* za prenovitvene procese). (b): Waldova identiteta (za čas ustavljanja $N_t + 1$ glede na naravno filtracijo zaporedja $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$) ter elementarni prenovitveni izrek.
2. Tipično (a ne vedno) so $(\hat{R}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dane *a priori*, in je $R_t = \sum_{i=1}^{N_t} \hat{R}_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} \hat{R}_i \mathbb{1}(S_i \leq t)$, $t \in [0, \infty)$, pa je pogoj (1) "na prazno" izpolnjen. Včasih pa moramo $(\hat{R}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ šele najti ...
3. Namesto (1) je dovolj imeti

$$\sum_{i=1}^{N_t-K} \hat{R}_i \leq R_t \leq \sum_{i=1}^{N_t+K} \hat{R}_i, \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (2)$$

za neko *omejeno* merljivo nenegativno slučajno spremenljivko K (za utemeljitev glej dokaz).

4. Trditve obveljajo tudi če, *ceteris paribus*, namesto da so $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ enako porazdeljene s končnim upanjem μ , porazdelitveno funkcijo F , $F(0) < 1$, to isto obvelja samo za $(T_i)_{i \in \mathbb{N}_{\geq 2}}$ (prenovitev z zaostankom). Pač zato ker krepki zakon velikih števil in elementarni prenovitveni izrek veljata tudi za prenovitvene procese z zaostankom. Dodatno je dovolj, *ceteris paribus*, namesto da so $(\hat{R}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ enako porazdeljene, zahtevati samo da so s.g. končne (za (a)) oz. s končnim upanjem (za (b)), ter enako porazdeljene od nekod naprej (se pravi $(\hat{R}_i)_{i \in \mathbb{N}_{\geq L}}$ enako porazdeljene za nek $L \in \mathbb{N}$). Namreč, v tem primeru lahko definiramo $\hat{\hat{R}}_i = \hat{R}_i$ za $i \in \mathbb{N}_{\geq L}$;

¹It is not *a priori* clear whether the event $\{\lim_{t \rightarrow \infty} R_t/t = \nu/\mu\}$ is measurable or not. It *is*, for example, if R has right-continuous sample paths. (Irrespective of the sample path regularity of R , we may conclude measurability of said event *a posteriori*, provided the underlying probability space is complete.)

(morda na raširitvi verjetnostnega prostora) enako (kot R_L) porazdeljene, neodvisne (od vseh do sedaj omenjenih slučajnih elementov) $\hat{\hat{R}}_i$ za $i \in \mathbb{N}_{<L}$; končno

$$\tilde{R}_t := \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_t} \hat{\hat{R}}_i & \text{če je } t < T_1 + \dots + T_L, \\ R_t + \sum_{i=1}^L (\hat{\hat{R}}_i - \hat{R}_i) & \text{če je } t \geq T_1 + \dots + T_L \end{cases}, \text{ za } t \in [0, \infty).$$

Za proces $\tilde{R}$ lahko uporabimo zgornjo trditev. Iz predpostavk sledi da ima $\tilde{R}$ enako relevantno s.g. (oz. v upanju; upoštevaj $\{N_t \leq L-1\} = \{t < T_1 + \dots + T_L\}$ in $R_t \leq \sum_{i=1}^{N_t+1} \hat{R}_i$!) asimptotiko kot R .

5. Z uporabo linearnosti lahko (kot posledico) formuliramo ustrezno trditev ko R ni nujno nene-gativen proces.

6. Itd. itn.

Dokaz. (a). Dividing by t in (1), taking the limits inferior and superior, we obtain, a.s. (more precisely, outside a negligible set; we forego making this distinction explicit in the sequel):

$$\nu/\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N_t} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \hat{R}_i \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N_t+1} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N_t+1} \sum_{i=1}^{N_t+1} \hat{R}_i = \nu/\mu.$$

All the indicated limits exist a.s. by the strong law of large numbers for sequences of pairwise independent identically distributed random variables (we use here also $N_t \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$, a.s.), and the strong law of large numbers for renewal processes. Since the limits inferior and superior thus coincide a.s., the limit exists a.s. too, and is equal to ν/μ . Clearly this continues to hold true if one assumes only (2).

(b). Owing to the fact that $N_t + 1$ is a stopping time relative to the natural filtration of the sequence $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, wrt which the nonnegative sequence $(\hat{R}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ has independent values, Wald's identity gives $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N_t+1} \hat{R}_i] = \nu(\mathbb{E}[N_t] + 1)$, and similarly $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N_t+1} \hat{R}_i \wedge M] = \mathbb{E}[\hat{R}_1 \wedge M](\mathbb{E}[N_t] + 1)$ for each $M \in \mathbb{N}$ ($(\hat{R}_i \wedge M)_{i \in \mathbb{N}}$ has independent values wrt to $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ also). So infimizing by $M \in \mathbb{N}$ in (1) on the left-hand-side, then taking expectations, dividing by t , taking the limits inferior and superior and using the elementary renewal theorem /that $\mathbb{E}N_t/t \rightarrow 1/\mu$ as $t \rightarrow \infty$ /, we obtain:

$$\mathbb{E}\hat{R}_1 \wedge M / \mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}N_t + 1}{t} \mathbb{E}[\hat{R}_1 \wedge M] - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M}{t} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}R_t}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}R_t}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}N_t + 1}{t} \nu = \nu/\mu.$$

We conclude by letting M ascend to ∞ and using monotone convergence. If one is only given (2) then if $\nu = \infty$ an almost identical argument with the $\liminf$ only yields the desired conclusion. If however $\nu < \infty$, still the $\liminf$ part goes through. For the $\limsup$ bit one uses in addition the strong Markov property for iid sequences $(N_t + 1)$ being a stopping time of $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ wrt which $(\hat{R}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ has independent identically distributed values). □