

Krepka lastnost Markova za slučajne sprehode

Matija Vidmar

20. marec 2017

Trditev. Na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je dan proces $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, z vrednostmi v $\mathbb{R}^d$ za nek $d \in \mathbb{N}$, prilagojen filtraciji $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ v diskretnem času. Privzemimo da je $X_0 = 0$, in da ima X stacionarne, neodvisne prirastke glede na $\mathbb{F}$: se pravi, če definiramo $Z_n := X_n - X_{n-1}$ za $n \in \mathbb{N}$, je $Z := (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, Z_{n+1} pa je neodvisna od $\mathcal{F}_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}_0$. Naj bo še τ čas ustavljanja glede na filtracijo $\mathbb{F}$ z $\mathbb{P}(\tau < \infty) > 0$. Potem (i) pod pogojno mero $\mathbb{P}(\cdot | \tau < \infty)$ je zgodovina do časa τ na dogodku $\{\tau < \infty\}$, $\mathcal{F}_\tau|_{\{\tau < \infty\}}$ neodvisna od procesa prirastkov (na $\{\tau < \infty\}$) $\Delta_\tau X := (X_{\tau+m} - X_\tau)_{m \in \mathbb{N}_0}$ po času τ in (ii) zakon¹ X -a pod $\mathbb{P}$ sovpada z zakonom $\Delta_\tau X$ pod mero $\mathbb{P}(\cdot | \tau < \infty)$.

Opombe.

- (a) Zaradi prilagojenosti je $\mathcal{F}_\tau^X \subset \mathcal{F}_\tau$.
- (b) Pogosto je $\mathbb{F}$ naravna filtracija procesa X , ki sovpada z naravno filtracijo procesa Z .
- (c) Namesto $\mathbb{R}^d$ lahko vzamemo npr. katerokoli merljivo Abelovo grupo, katere merljiva in algebrska struktura sta usklajeni.

Dokaz. Naj bo $(\square_\tau Z)_i = Z_{\tau+i}$ za $i \in \mathbb{N}$. Ker je $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, ter $(\Delta_\tau X)_n = \sum_{i=1}^n Z_{\tau+i}$ za vse $n \in \mathbb{N}$, je $X = G \circ Z$ ter $\Delta_\tau X = G \circ (\square_\tau Z)$ za isto merljivo transformacijo G . Tako sledi trditev takoj iz krepke lastnosti Markova za zaporedja s stacionarnimi neodvisnimi vrednostmi. $\square$

¹Na prostoru $((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^{\otimes \mathbb{N}_0})$.