

Slabo zastavljeni problemi

Hadamard¹ je na prelomu 19. in 20. stoletja definiral, kaj naj bi bil dobro zastavljen problem. Po Hadamardu je problem **slabo zastavljen**, če:

- rešitev ni enolična, ali
- rešitev ni zvezna funkcija podatkov, kar pomeni, da poljubno majhna motnja podatkov lahko povzroči poljubno veliko motnjo v rešitvi.

Slabo zastavljeni problemi

Hadamard¹ je na prelomu 19. in 20. stoletja definiral, kaj naj bi bil dobro zastavljen problem. Po Hadamardu je problem **slabo zastavljen**, če:

- rešitev ni enolična, ali
- rešitev ni zvezna funkcija podatkov, kar pomeni, da poljubno majhna motnja podatkov lahko povzroči poljubno veliko motnjo v rešitvi.

Hadamard je bil prepričan, da se slabo zastavljene probleme lahko ustvari le umetno, ne morejo pa opisovati dejanskih pojavov v naravi.

Izkazalo se je, da to ni res in danes poznamo veliko slabo zastavljenih t.i. inverznih problemov, ki nastopajo na področjih obdelave slik, akustike, obdelave signalov, tomografije, geofizike, ...

¹Francoski matematik Jacques Salomon Hadamard (1865–1963).

Zgled inverznega problema

Osnoven zgled linearnega slabo pogojenega problema je Fredholmova² integral-ska enačba 1. vrste, ki ima obliko

$$\int_0^1 K(s, t) f(t) dt = g(s), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

kjer poznamo desno stran g in jedro K , iščemo pa funkcijo f .

Za jedro K mora veljati, da je s kvadratom integrabilno, oz.

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s, t)^2 ds dt < \infty.$$

Medtem ko jedro K dobimo iz matematičnega modela v ozadju, desno stran g ponavadi dobimo iz meritev, zato vrednosti poznamo le v končnem številu točk in le z določeno natančnostjo.

²Švedski matematik Erik Ivar Fredholm (1866–1927).

Težave z visokimi frekvencami

Integriranje s K deluje na funkcijo f kot glajenje. Pričakujemo lahko, da se zgladijo vse komponente f z visokimi frekvencami, ostmi in prelomi. Tako npr. za $f(t) = \sin(2\pi pt)$ in

$$g(s) = \int_0^1 K(s, t) f(t) dt$$

iz Riemann–Lebesgueove leme sledi, da gre $g \rightarrow 0$, ko gre $p \rightarrow \infty$.

Težave z visokimi frekvencami

Integriranje s K deluje na funkcijo f kot glajenje. Pričakujemo lahko, da se zgladijo vse komponente f z visokimi frekvencami, ostmi in prelomi. Tako npr. za $f(t) = \sin(2\pi pt)$ in

$$g(s) = \int_0^1 K(s, t) f(t) dt$$

iz Riemann–Lebesgueove leme sledi, da gre $g \rightarrow 0$, ko gre $p \rightarrow \infty$.

Pri inverznem problemu, ko iz g računamo f , lahko pričakujemo ravno obratno, da bomo v f dobili močno ojačane komponente g z visokimi frekvencami. Tako lahko že poljubno majhne motnje v g povzročijo velike motnje v f in problem ni dobro zastavljen.

Težave z visokimi frekvencami

Integriranje s K deluje na funkcijo f kot glajenje. Pričakujemo lahko, da se zgladijo vse komponente f z visokimi frekvencami, ostmi in prelomi. Tako npr. za $f(t) = \sin(2\pi pt)$ in

$$g(s) = \int_0^1 K(s, t) f(t) dt$$

iz Riemann–Lebesgueove leme sledi, da gre $g \rightarrow 0$, ko gre $p \rightarrow \infty$.

Pri inverznem problemu, ko iz g računamo f , lahko pričakujemo ravno obratno, da bomo v f dobili močno ojačane komponente g z visokimi frekvencami. Tako lahko že poljubno majhne motnje v g povzročijo velike motnje v f in problem ni dobro zastavljen.

Naš cilj je dobiti čim boljši približek za f .

Posplošitev singularnega razcepa

Vsako s kvadratom integrabilno jedro K ima razvoj

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i u_i(s) v_i(t),$$

kjer so u_i in v_i leve in desne singularne funkcije K , ter $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq 0$ singularne vrednosti K . Singularne funkcije so ortonormirane, kar pomeni

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j, \end{cases}$$

kjer je skalarni produkt podan z $\langle \varphi, \theta \rangle := \int_0^1 \varphi(t) \theta(t) dt$. Velja zveza

$$\int_0^1 K(s, t) v_i(t) dt = \sigma_i u_i(s), \quad i = 1, 2, \dots,$$

ki kaže, da je σ_i faktor ojačitve, ko so v_i preslika v u_i . Rešitev integralske enačbe lahko potem izrazimo z razvojem

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle u_i, g \rangle}{\sigma_i} v_i(t).$$

Zgled - prevajanje toplote

Za zgled bomo uporabili primer prevajanja toplote. Funkciji f in g , ki opisujeta temperaturo na robu in v notranjosti telesa, povezuje Volterrova³ integralna enačba

$$g(s) = \int_0^s K(s, t) f(t) dt, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

z jedrom

$$K(s, t) := \frac{e^{-\frac{1}{4(s-t)}}}{2\sqrt{\pi(s-t)^3}}.$$

Zgled - prevajanje toplote

Za zgled bomo uporabili primer prevajanja toplote. Funkciji f in g , ki opisujeta temperaturo na robu in v notranjosti telesa, povezuje Volterrova³ integralna enačba

$$g(s) = \int_0^s K(s, t) f(t) dt, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

z jedrom

$$K(s, t) := \frac{e^{-\frac{1}{4(s-t)}}}{2\sqrt{\pi(s-t)^3}}.$$

Z uporabo kvadrature formel integralno enačbo diskretiziramo in dobimo sistem linearnih enačb

$$Ax = b,$$

kjer je matrika A izredno občutljiva. Elementi vektorja x predstavljajo vrednosti funkcije f v enakomerno razporejenih točkah z intervala $[0, 1]$, enako velja za b in g .

³Italijanski matematik in fizik Vito Volterra (1860–1940).

Literatura

1. P. C. Hansen, *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*, SIAM, Philadelphia, 1998.
2. B. Plestenjak, Razširjen uvod v numerične metode, DMFA - založništvo, Ljubljana, 2015