

Parcialne diferencialn enačbe (PM)

1. kolokvij, 23.4.2016

1. (20) Z uvedbo polarnih koordinat reši enačbo

$$-yu_x + xu_y = x^2 + y^2, \quad u(x, 0) = e^x, x > 0.$$

Rešitev: Vpeljemo $x = r \cos \varphi$ in $y = r \sin \varphi$. Tedaj velja

$$u_x = \cos \varphi - \frac{1}{r} \sin \varphi,$$

$$u_y = \sin \varphi + \frac{1}{r} \cos \varphi.$$

Dobimo enačbo

$$u_\varphi = r^2 \implies u(x, y) = (x^2 + y^2) \arctan \frac{y}{x} + C(x^2 + y^2).$$

Iz začetnega pogoja izvemo, da je $C(t) = e^{\sqrt{t}}$.

2. (25) Podan je začetni problem

$$(1 - x)u_x - yu_y = 0, \quad u(\alpha, y) = \beta y, \quad y > 0.$$

- a) V odvisnosti od $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ določi število njegovih rešitev.
b) Za $\alpha = 0$ in $\beta = 1$ poišči rešitev z razvojem po spremenljivki x .

Rešitev: Oglejmo si transferzalnostni pogoj za $\Gamma(s) = (\alpha, s, \beta s)$

$$(T) = \det \begin{bmatrix} 1 - \alpha & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 - \alpha.$$

Za $\alpha \neq 1$ je rešitev ena sama, saj $(T) \neq 0$. Nadalje $\Gamma'(s) = (0, 1, \beta)$ in $(a, b, c) = (0, -s, 0)$ za $\alpha = 1$. Torej, če je $\beta = 0$ sta vektorja vzporedna in imamo neskončno rešitev, sicer pa rešitve ni.

Za b) v enačbo vstavimo nastavek $u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(y)x^n$. Ko člene malo preuredimo, dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} [c_{n+1}(y)(n+1) - c_n(y)n - yc'_n(y)]x^n = 0.$$

Imamo torej $u(0, y) = c_0(y) = y$ in rekurzivno zvezo

$$c_{n+1}(y) = \frac{1}{n+1}(c_n(y)n + yc'_n(y)).$$

Iz nje ugotovimo, da je $c_n(y) = y$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Imamo torej

$$u(x, y) = y(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \frac{y}{1-x}.$$

3. (25) Podan je Cauchyjev problem

$$uu_x + yu_y = x, \quad u(x, \alpha x) = h(x).$$

a) Poišči vse $\alpha \in \mathbb{R}$ in $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, za katere ima problem neskončno mnogo rešitev.

b) Denimo, da je rešitev le ena. Poišči njeno parametrično obliko!

Namig za b): Oglej si $\tilde{x}$ in uporabi enačbo za $\dot{u}$.

Rešitev: Oglejmo si transferzalnostni pogoj za $\Gamma(s) = (s, \alpha s, h(s))$

$$(T) = \det \begin{bmatrix} h(s) & \alpha s \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} = \alpha(h(s) - s) \equiv 0.$$

Enačba je izpolnjena, ko je $h(s) = s$ ali ko je $\alpha \equiv 0$. V prvem primeru dobimo vedno neskončno mnogo rešitev saj

$$\Gamma'(s) = (1, \alpha, 1) \parallel (s, \alpha s, s) = (a, b, c),$$

v drugem primeru pa mora veljati še

$$\Gamma'(s) = (1, 0, h'(s)) \parallel (h(s), 0, s) = (a, b, c).$$

Torej $h(s)h'(s) = s$. Tej enačbi zadošča družina funkcij

$$h(s) = \pm\sqrt{s^2 + C}.$$

Denimo sedaj, da je rešitev enolična. Tedaj dobimo sistem

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = y, \quad \dot{u} = x.$$

Trivialno je $y = Ce^t$, velja pa tudi

$$\ddot{x} = \dot{u} = x.$$

Torej je

$$x = D_1 e^t + D_2 e^{-t}, \quad u = D_1 e^t - D_2 e^{-t}.$$

Iz začetnih pogojev dobimo $C = \alpha s$, $D_{1,2} = \frac{s \pm h(s)}{2}$.

4. (30) Podan je funkcional

$$F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - (y')^2) dx.$$

a) Določi stacionarno točko p.p. $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$ in $\int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx = 1$.

- b) Pokaži, da je ne moremo klasificirati z izrekom z vaj.
- c) Za katere $A \in \mathbb{R}$ funkcija $y_A(x) = A \sin(2Ax)$ izpolnjuje pogoje iz točke a)? Pokaži, da ne obstaja minimum funkcionala.

Rešitev: Definiramo $L_\lambda = y^2 - (y')^2 + \lambda y$ in dobimo EL -pogoj

$$y'' + y + \frac{\lambda}{2} = 0 \implies y = C \cos x + D \sin x - \frac{\lambda}{2}.$$

Zaradi začetnih pogojev mora veljati $C = D = \lambda/2$, zaradi integralskega pa $\lambda = 4/(4 - \pi)$. Nadalje sta lastni vrednosti matrike

$$H_{L_\lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

nasprotno predznačeni zato klasifikacija ni možna. Še več, za $A = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ družina y_A izpolni vse tri pogoje. Z nekaj računanja ugotovimo, da v tem primeru velja

$$F(y_A) = \frac{\pi}{2}(A^2 - A^4) \xrightarrow{A \rightarrow \pm\infty} -\infty.$$

To potrdi, da ne obstaja minimum funkcionala.