

2. Kolokvij iz Izbranih poglavij iz matematike

30. maj 2018

1. Dan je polinom $p(x) = x^4 + x + 1$ v kolobarju polinomov $\mathbb{Z}_2[x]$.
 - (a) [10] Pokaži, da je kvocientni kolobar $K = \mathbb{Z}_2[x]/(p)$ komutativen obseg.
 - (b) [15] Izračunaj inverz ekvivalenčnega razreda polinoma $q(x) = x^3 + x$ v K .
2. (a) [15] Izračunaj stopnjo in bazo razširitve $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ nad \mathbb{Q} in nato pokaži, da je razširitev enostavna.
 - (b) [10] Poišči razpadni obseg polinoma $p(x) = x^5 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.
3. Dana je funkcija $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.
 - (a) [15] Z razvojem funkcije f v Fourierovo vrsto pokaži, da za vsak $x \in [-\pi, \pi]$ velja

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{1 - 4k^2} e^{ikx}.$$

Namig: izrazi funkcijo \cos s kompleksnim eksponentom.

- (b) [10] Z uporabo Fourierovega razvoja izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

4. (a) [15] Naj bo funkcija g absolutno integrabilna, funkcija f pa naj bo zvezna in L -periodična. Pokaži, da je konvolucija g z f prav tako L -periodična.
 - (b) [10] Kaj lahko poveš o konvoluciji, če sta f in g obe periodični (npr. s periodama L in K)? Ali to pomeni, da je konvolucija obenem L - in K -periodična in kako je to mogoče? Odgovor obrazloži.