

1. Kolokvij iz Izbranih poglavij iz matematike

18. april 2018

1. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ sestavljeno število in $p_n(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.
 - (a) [15] Pokaži, da je polinom p_n razcepen v $\mathbb{Q}[x]$.
 - (b) [10] Razcepi polinom p_8 na produkt nerazcepnih faktorjev v $\mathbb{Q}[x]$.
2. Naj bo $\mathbb{Z}[i] = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ kolobar Gaussovih celih števil.
 - (a) [10] Izračunaj največji skupni delitelj Gaussovih celih števil $z = 20 + 10i$ in $w = 11 + 7i$.
 - (b) [15] Zapiši tabeli za seštevanje in množenje v kvocientnem kolobarju $K = \mathbb{Z}[i]/(2)$. Ali je kolobar K izomorfen kateremu od kolobarjev \mathbb{Z}_n za kak $n \in \mathbb{N}$?
3.
 - (a) [10] Poišči vse homomorfizme kolobarjev $\phi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}$ in $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$.
 - (b) [15] Naj bo $K = \mathbb{R}[x]/(x^2 - x)$. Ugotovi, ali je K cel kolobar. Nato poišči vse obrnljive elemente, vse ideale in vse maksimalne ideale v kolobarju K .
4. Naj bo K komutativen kolobar brez deliteljev nič in naj bo $f : K \rightarrow F$ monomorfizem iz kolobarja K v obseg F . Pokaži, da lahko f enolično razširimo na obseg ulomkov \overline{K} . Natančneje, pokaži:
 - (a) [10] Obstaja homomorfizem obsegov $\overline{f} : \overline{K} \rightarrow F$, za katerega velja $\overline{f}|_K = f$.
 - (b) [15] Če je $g : \overline{K} \rightarrow F$ homomorfizem obsegov, za katerega velja $g|_K = f$, potem je $g = \overline{f}$.