

# Problem lastnih vrednosti

- 1 Uvod
- 2 Potenčna metoda
- 3 Inverzna iteracija
- 4 QR iteracija
- 5 Metode za simetrične matrice
  - Sturmovo zaporedje
  - Jacobijeva iteracija

# Uvod

- Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Paru  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  rečemo lastni par za  $A$ , če je

$$A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

Skalar  $\lambda$  je lastna vrednost, vektor  $\mathbf{x}$  pa (desni) lastni vektor.

- Neničelni vektor  $\mathbf{y}$  je levi lastni vektor, če je

$$\mathbf{y}^H A = \lambda \mathbf{y}^H,$$

kjer je  $^H$  Hermitsko transponiranje (konjugiranje in navadno transponiranje).

- Dovolj je obravnavati problem desnih lastnih vektorjev.

## Lema

*Levi in desni lastni vektorji matrike  $A$ , ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so ortogonalni.*

- Iskanje lastnih vrednosti **preko karakterističnega polinoma  $\det(A - \lambda I)$  ni dober pristop.**
- Poznamo različne **stabilne algoritme** za računanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev. Izbor algoritma je odvisen od tega, kaj želimo izračunati:
  - ▶ Ali je matrika majhna in polna, ali velika in razpršena?
  - ▶ Ali je matrika simetrična (hermitska)?
  - ▶ Ali potrebujemo vse lastne vrednosti?
  - ▶ Ali poleg lastnih vrednosti potrebujemo tudi lastne vektorje?

## Izrek

*Za vsako matriko  $A$  obstajata unitarna matrika  $U$  in zgornja trikotna matrika  $T$ , da je  $U^H A U = T$  (Schurova forma).*

## Izrek

*Za vsako realno matriko  $A$  obstajata ortogonalna matrika  $Q$  in kvazi zgornja trikotna matrika  $T$ , da je  $Q^T A Q = T$ .*

## Opomba

*Matrika  $T$  je kvazi zgornja trikotna v smislu, da ima samo na nekaterih diagonalnih mestih bloke  $2 \times 2$ , sicer pa je prava zgornja trikotna (ti bloki ustrezajo kompleksnim lastnim vrednostim).*

# Potenčna metoda

- Izberimo normirani vektor  $\mathbf{z}_0$  in generirajmo

$$\mathbf{y}_{k+1} = A \mathbf{z}_k, \quad \mathbf{z}_{k+1} = \frac{1}{\|\mathbf{y}_{k+1}\|} \mathbf{y}_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

- Dobimo zaporedje normiranih vektorjev, za katere se izkaže, da pogosto konvergirajo k lastnemu vektorju matrike  $A$ .

## Izrek

*Naj bo  $\lambda_1$  dominantna lastna vrednost matrike  $A$ , torej*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

*Če ima vektor  $\mathbf{z}_0$  neničelno komponento v smeri lastnega vektorja, ki pripada lastni vrednosti  $\lambda_1$ , potem zaporedje vektorjev  $\mathbf{z}_k$  po smeri konvergira k lastnemu vektorju, ki pripada  $\lambda_1$ .*

## Opomba

Metodo lahko predelamo tudi za primere:

- $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$  in  $\lambda_1 = -\lambda_2$ .
- $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$  in  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ .

- Kako končati iteracijo? Pogoji zaustavljanja

$$\|\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{z}_k\| \leq \varepsilon$$

ni dober, ker zaporedje konvergira le po smeri.

- Izkaže se, da pomembno vlogo pri pogoju zaustavitve igra Rayleighov kvocient

$$\rho(\mathbf{x}, A) = \frac{\mathbf{x}^H A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{x}}.$$

- Iteracijo ustavimo, ko je

$$\|A \mathbf{z}_k - \rho_k \mathbf{z}_k\| \leq \varepsilon,$$

kjer je

$$\rho_k := \rho(\mathbf{z}_k, A).$$

- Hitrost konvergene je **linearna**. Odvisna je od razmerja  $|\lambda_2|/|\lambda_1|$ . Čim bližje je razmerje 0, tem hitrejša je konvergenca.
- Ko poiščemo dominantno lastno vrednost  $\lambda_1$ , lahko problem reduciramo na iskanje naslednjih lastnih vrednosti (po velikosti).

- Hotellingova redukcija za  $A = A^T$ . Definiramo

$$B := A - \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T.$$

kjer je  $(\lambda_1, \mathbf{x}_1)$ ,  $\|\mathbf{x}_1\|_2 = 1$ , dominantni lastni par za  $A$ . Velja:  
 $B \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$  in  $B \mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$ ,  $k \neq 1$ . Potenčna metoda na  $B$  nam sedaj da drugo dominantno lastno vrednost matrike  $A$ . Pri tem matrike  $B$  ne izračunamo eksplicitno, saj je

$$B \mathbf{z} = A \mathbf{z} - \lambda_1 (\mathbf{x}_1^T \mathbf{z}) \mathbf{x}_1.$$

- Householderjeva redukcija za splošno matriko.

Poiščemo ortogonalno matriko  $Q$ , da je  $Q \mathbf{x}_1 = k \mathbf{e}_1$  (Householderjevo zrcaljenje).

Matrika  $B = Q A Q^\top$  ima obliko

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti matrike  $C$  pa se ujemajo s preostalimi lastnimi vrednostmi matrike  $A$ .

# Inverzna iteracija

- Največja lastna vrednost matrike  $A$  je hkrati najmanjša lastna vrednost matrike  $A^{-1}$ .
- Če iščemo **najmanjšo lastno vrednost**, lahko torej uporabimo **potenčno metodo na matriki  $A^{-1}$** .
- Namesto množenja  $\mathbf{y}_{k+1} = A^{-1}\mathbf{z}_k$  seveda **rešujemo sistem  $A\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{z}_k$** .
- Vemo, da je Rayleighov kvocient najboljši približek za lastno vrednost, če poznamo približek za lastni vektor.
- Kaj pa obratno? Denimo, da je  $\sigma$  približek za lastno vrednost. Kako izračunati pripadajoči lastni vektor?
- Rešitev: Izvajamo inverzno iteracijo na matriki  $A - \sigma I$ .
- Če je  $\sigma$  točna lastna vrednost, pričakujemo težave, a v praksi nas iz tega spet rešijo numerične napake.

# QR iteracija

- QR iteracija je **trenutno najboljša numerična metoda** za izračun vseh lastnih vrednosti splošne nesimetrične matrike.
- Osnovna varianta metode je

$$A_0 = A$$

$$k = 0, 1, \dots$$

$$A_k = Q_k R_k \text{ (QR razcep)}$$

$$A_{k+1} = R_k Q_k$$

## Lema

*Če ima matrika  $A$  lastne vrednosti s paroma različnimi absolutnimi vrednostmi, potem zaporedje matrik  $A_k$  konvergira proti Schurovi formi.*

- Za uporabno verzijo QR iteracije potrebujemo nekaj izboljšav:
  - ▶ Matriko  $A$  najprej reduciramo na zgornjo Hessenbergovo z ortogonalnimi podobnostnimi transformacijami (Householder ali Givens).
  - ▶ QR iteracijo potem uporabimo na zgornji Hessenbergovi obliki, saj velja spodnja trditev:

## Lema

*Če je  $A$  zgornja Hessenbergova, se njena oblika med QR iteracijo ohranja.*

- Ker je hitrost konvergence odvisna od razmerja med lastnimi vrednostmi, metodo izboljšamo s **premiki**.

# Metode za simetrične matrike

- Za simetrične matrike poznamo posebne metode, ki izkoriščajo simetrijo in lastnosti simetričnih matrik.
- Večina temelji na dejstvu, da se da simetrično matriko ortogonalno podobno pretvoriti na simetrično tridiagonalno matriko (za simetrične matrike je zgornja Hessenebergova oblika v resnici tridiagonalna).
- Zato lahko predpostavimo, da je matrika  $A$  že simetrična tridiagonalna.
- Uporabimo lahko kar QR iteracijo s premikom.
- Sturmovo zaporedje.
- Jacobijeva metoda.

# Sturmovo zaporedje

- Naj bo

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

ireducibilna ( $b_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n-1$ ) tridiagonalna simetrična matrika.

- Naj bo  $T_r$  vodilna  $r \times r$  podmatrika matrike  $T$  in

$$f_r(\lambda) = \det(T_r - \lambda I).$$

Velja

$$f_{r+1}(\lambda) = (a_{r+1} - \lambda) f_r(\lambda) - b_r^2 f_{r-1}(\lambda),$$

kjer je  $f_0(\lambda) = 1, f_1(\lambda) = a_1 - \lambda$ .

## Izrek

Polinomi  $f_r$ ,  $r = 0, 1, \dots, n$ , tvorijo Sturmovo zaporedje, kar pomeni, da zanje velja:

- 1  $f_0(\lambda) \neq 0$ , za vsak  $\lambda$ .
- 2 Če je  $f_r(\lambda_0) = 0$  za  $r < n$ , potem je  $f_{r-1}(\lambda_0)f_{r+1}(\lambda_0) < 0$ .
- 3 Če je  $f_n(\lambda_0) = 0$ , potem je  $f_{n-1}(\lambda_0)f'_n(\lambda_0) < 0$ .

## Posledica

Ireducibilna tridiagonalna simetrična matrika ima enostavne lastne vrednosti.

- Pri fiksem  $\lambda_0$  označimo z  $u(\lambda_0)$  **število ujemanj predznakov v zaporedju števil  $f_r(\lambda_0)$ ,  $r = 0, 1, \dots, n$** . Pri tem vsako notranjo ničlo štejemo za eno ujemanje, ničlo na koncu pa ne.

## Lema

*Število  $u(\lambda_0)$  je enako številu lastnih vrednosti matrike  $T$ , ki so strogo večje od  $\lambda_0$ .*

- Sedaj lahko  **$k$ -to lastno vrednost po velikosti poiščemo z bisekcijo.**
- Število  $\lambda_k$  je namreč približek za  $k$ -to lastno vrednost, če je  $u(\lambda_k - \varepsilon) = k$  in  $u(\lambda_k + \varepsilon) = k - 1$ .
- Metoda je torej še posebej primerna za iskanje natančno določene lastne vrednosti (recimo tretje po velikosti).

# Jacobijeva iteracija

- Matrike ne reduciramo na tridagonalno obliko.
- Z množenji z Givensovimi rotacijami z leve in desne jo poskušamo spremeniti v diagonalno.
- Če želimo v matriki  $A$  uničiti element na mestu  $(p, q)$ , poiščemo givensovo rotacijo

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix},$$

da bo

$$R^\top \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{pq} & a_{qq} \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

- Izkaže se, da je

$$c = \sqrt{\frac{1}{1+t^2}}, \quad s = ct,$$

kjer je

$$t = \frac{\text{sign}(\tau)}{|\tau| + \sqrt{1 + \tau^2}}, \quad \tau = \frac{a_{pp} - a_{qq}}{2a_{pq}}.$$

## Definicija

Za matriko  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definiramo

$$\text{off}(A) = \sqrt{\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n |a_{jk}|^2}.$$

Vrednost  $\text{off}(A)$  je Frobeniusova norma matrike  $A$  brez diagonale.

## Lema

Če je matrika  $A'$  dobljena iz  $A$  z enim korakom Jacobijeve metode na elementu  $(p, q)$ , je

$$\text{off}(A')^2 = \text{off}(A)^2 - 2a_{pq}^2.$$

- Z vsako Jacobijevo rotacijo se torej  $\text{off}(A)$  zmanjša. Postopek ponavljamo, dokler ni  $\text{off}(A) \leq \varepsilon$ .
- Variante:
  - ▶ **Klasična varianta:** uničujemo po absolutni vrednosti največji izvendiagonalni element.
  - ▶ **Ciklična varianta:** vedno uničujemo v enakem vrstnem redu vse elemente izven diagonale.
  - ▶ **Pragovna varianta:** vedno uničujemo v enakem vrstnem redu, a le elemente, ki po absolutni vrednosti presegajo neko predpisano (majhno) mejo.