

Interpolacija

1 Uvod

2 Oblike interpolacijskega polinoma

- Klasična oblika
- Klasična oblika
- Newtonova oblika

3 Formule za numerično odvajanje

Uvod

- Osnovni problem interpolacije: dane so vrednosti f_i , $i = 0, 1, \dots, n$, v paroma različnih točkah x_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Iščemo polinom p najnižje možne stopnje, za katerega velja

$$p(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

- Polinom p se imenuje **interpolacijski polinom**.

Lema

Za podatke (x_i, f_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, kjer so x_i paroma različne točke, obstaja natanko en interpolacijski polinom p_n stopnje $\leq n$.

- Interpolacijski polinom pogosto uporabimo za izračun vrednosti pri $x \neq x_i, i = 0, 1, \dots, n$.
- Namesto interpolacijskega polinoma lahko iščemo kakšno drugo “preprosto” funkcijo, ki zadošča interpolacijskim pogojem.
- Če je n velik, potem interpolacijski polinom **ni primern**.
- Alternativa je, da podatke razdelimo v gruče, konstruiramo interpolacijske polinoma na majhnem številu podatkov in jih “zlepimo” v zlepke.
- Dandanes so zlepki osnova za večino vizualizacij, animacij, načrtovanje,...

Klasična oblika

- Interpolacijski polinom zapišemo v klasični obliki

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

- Dobimo sistem linearnih enačb

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f_0$$

$$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = f_1$$

$$\vdots$$

$$a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = f_n.$$

- V matrični obliki torej

$$V \mathbf{a} = \mathbf{f}.$$

- Pri tem je $\mathbf{a} = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)^\top$, $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n)^\top$ in

$$V = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{bmatrix}.$$

- Ker je

$$\det(V) = \prod_{i < j} (x_i - x_j),$$

ima sistem enolično rešitev.

- Računanje na tak način je **prezahtevno in slabo pogojeno**. Če je denimo $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \dots, n$, je za $n = 5$ pogojenstno število matrike V $4.9 \dots 10^3$ m, pri $n = 20$ pa že kar $9.7 \dots 10^{16}$.
- Interpolacijski polinom znamo **izračunati bolj ekonomično in natančneje**.

Lagrangeova oblika

- Če namesto baze potenc za polinom izberemo ustrežnejšo bazo, lahko interpolacijski polinom kar konstruiramo.
- Naj bo

$$\ell_{n,i}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

- Potem je

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j \ell_{n,j}(x)$$

interpolacijski polinom stopnje $\leq n$ za podatke (x_i, y_i) ,
 $i = 0, 1, \dots, n$.

- Naj bo $\omega(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Potem na kratko pišemo

$$\ell_{n,i}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}.$$

Izrek

Če je f $(n + 1)$ -krat zvezno odvedljiva funkcija na intervalu $[a, b]$, ki vsebuje vse paroma različne točke x_0, x_1, \dots, x_n , potem za vsak $x \in [a, b]$ obstaja tako število $\xi \in (a, b)$, da je

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x).$$

- Tudi Lagrangeova oblika ni najboljša za konstrukcijo (veliko operacij in vnaprejšnje poznavanje stopnje polinoma).

Newtonova oblika

Definicija

Deljena diferenca $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k , ki se ujema s funkcijo f v x_0, x_1, \dots, x_k .

Izrek

Za deljene diference velja:

a)

$$p_n(x) = [x_0]f + (x - x_0)[x_0, x_1]f + \dots \\ + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})[x_0, x_1, \dots, x_n]f$$

je interpolacijski polinom, ki se v točkah x_0, x_1, \dots, x_n ujema z f .

b) *Zadoščajo rekurzijski formuli*

$$[x_0, x_1, \dots, x_k]f = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_k]f - [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}.$$

- Polinom iz prejšnjega izreka se imenuje **Newtonov interpolacijski polinom**.
- Kaj se zgodi, ko gresta dve ali več točk v deljeni diferenci druga proti drugi?
- Izkaže se, da splošeno deljeno diferenco lahko definiramo takole:

$$[x_0, \dots, x_k]f = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & x_0 = \dots = x_k, \\ \frac{[x_1, \dots, x_k]f - [x_0, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}, & \text{sicer.} \end{cases}$$

- Če se točke v deljeni diferenci ponovijo, pomeni, da bo polinom poleg vrednosti interpoliral še prve, druge, ... odvode.

Primer

Zapišimo interpolacijski polinom p , za katerega je $p(0) = 1$, $p'(0) = 2$, $p''(0) = 3$, $p(1) = -1$, $p'(1) = 3$ in $p(2) = 4$. Tabela deljenih diferenc je

x_i	$[\cdot]f$	$[\cdot, \cdot]f$	$[\cdot, \cdot, \cdot]f$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]f$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot]f$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot]f$
0	1					
		2				
0	1		$\frac{3}{2}$			
		2		$-\frac{11}{2}$		
0	1		-4		$\frac{29}{2}$	
		-2		9		$-\frac{79}{8}$
1	-1		5		$-\frac{21}{4}$	
		3		$-\frac{3}{2}$		
1	-1		2			
		5				
2	4					

polinom pa $p(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x^3 + \frac{29}{2}x^3(x-1) - \frac{79}{8}x^3(x-1)^2$.

- Sedaj lahko zapišemo izrek za napako interpolacijskega polinoma tudi v primeru, ko točke x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, niso paroma različne.

Izrek

Naj bo f $(n + 1)$ -krat zvezno odvedljiva funkcija in p_n interpolacijski polinom na točkah x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ (če se točke ponavljajo, polinom interpolira ustrezne višje odvode). Potem je

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x),$$

kjer je $\min\{x, x_0, \dots, x_n\} \leq \xi \leq \max\{x, x_0, \dots, x_n\}$.

Primer

Izračunajmo kvadratni interpolacijski polinom, ki interpolira funkcijsko vrednost funkcije $f(x) = \sin x$ v točkah $x_0 = 0$ in $x_1 = \pi/2$ ter njen odvod v $x_0 = 0$. Nato čim boljše ocenimo napako pri interpolaciji.

S tabelo deljenih diferenc izračunamo interpolacijsko parabolo

$$p_2(x) = x + \frac{4 - 2\pi}{\pi^2} x^2.$$

Napako ocenimo s pomočjo prejšnjega izreka. Očitno je $|f^{(3)}(x)| \leq 1$, faktor $\omega(x) = x^2(x - \pi/2)$ pa ocenimo s pomočjo odvoda. Dobimo

$$|\omega(x)| \leq \max_{x \in [0, \pi/2]} x^2(\pi/2 - x) = \frac{\pi^3}{54}.$$

Torej je

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{3!} \frac{\pi^3}{54} = 0.095698.$$

Numerično odvajanje

- Radi bi **numerično računali odvod** neke zvezno odvedljive funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ v točki $c \in [a, b]$.
- Ponavadi uporabimo eno od naslednjih možnosti:
 - ▶ metoda nedoločenih koeficientov,
 - ▶ odvod interpolacijskega polinoma za f v točki c ,
 - ▶ odvod nekega ustreznega zlepka za f na $[a, b]$ v točki c .
- Nobena od metod ne da popolnoma zadovoljivega rezultata, saj je znano, da je **numerično odvajanje zelo občutljivo na računske napake**.
- Še najboljše se obnese tretja metoda, preko zlepka.

- Pri metodi nedoločenih koeficientov išcemo odvod v obliki linearne kombinacije vrednosti funkcije f v okolici točke c .
- Pri tem koeficiente določimo iz sistema enačb, ki ga dobimo z zahtevo, da je odvod točen vsaj za polinome do dovolj visoke stopnje.
- Lahko se prepričamo, da zaradi translacijske invariantnosti lahko privzamemo $c = 0$ in problem poenostavimo s predpostavko, da so okoliške točke ekvidistantne:

$$f'(0) \approx \sum_{j=0}^k \alpha_j f(x_j), \quad x_{j+1} - x_j =: h, \quad x_j \in [-a, a].$$

Primer

Poskusimo izpeljati pravilo za odvajanje na podlagi vednosti v točkah $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ in $x_2 = h$. Želimo, da je pravilo točno za polinome do čim višje stopnje. Ker imamo tri proste koeficiente, pričakujemo, da bo najvišja stopnja 2. Zaradi linearnosti problema, lahko zahtevamo le, da je pravilo točno za $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ in $f_2(x) = x^2$. Z nastavkom $f'(0) \approx \alpha_0 f(-h) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(h)$. Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned}\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ \alpha_0(-h) + \alpha_2 h &= 1, \\ \alpha_0 h^2 + \alpha_2 h^2 &= 0.\end{aligned}$$

Dobimo $\alpha_0 = -1/(2h)$, $\alpha_1 = 0$ in $\alpha_2 = 1/(2h)$, pravilo pa

$$f'(0) \approx \frac{f(h) - f(-h)}{2h}.$$

- Pri metodi, kjer odvajamo interpolacijski polinom, tega najprej konstruiramo, nato pa izračunamo njegov odvod v ustrezni točki $x = c$.
- Metode z zlepkom ne bomo opisovali, temelji pa na predhodni konstrukciji zlepka (ponavadi kubičnega) in nato uporabi odvoda na tem zlepku.
- Podobno, kot smo konstruirali prvi odvod, lahko izpeljemo tudi formule za **višje odvode**.