

2. sklop dodatnih vaj iz Izbranih poglavij iz matematike

(1) Izračunaj stopnji naslednjih razširitev:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2})$ nad $\mathbb{Q}$.

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5})$ nad $\mathbb{Q}$.

Rešitev:

(a) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 6$.

(b) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}) : \mathbb{Q}] = 15$.

(2) Poišči razpadne obsege naslednjih polinomov:

(a) $p(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$,

(b) $p(x) = x^4 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$,

(c) $p(x) = x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$.

Rešitev:

(a) $F = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

(b) $F = \mathbb{Q}(i)$.

(c) $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(3) Pokaži, da velja $\mathbb{Q}(\sqrt{m} + \sqrt{n}) = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ za poljubni števili $m, n \in \mathbb{N}$.

(4) Naj bo $a \in \mathbb{C}$ algebraično število, za katero je stopnja razširitve $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ liho število. Pokaži, da je potem $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(a^2)$.

(5) Konstruiraj homeomorfizma med danima množicama:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$,

(b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

(6) Ugotovi, ali sta dani preslikavi homeomorfizma:

(a) Preslikava $id : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_1)$ s predpisom $id(x, y) = (x, y)$.

(b) Preslikava $id : (C[0, 1], d_1) \rightarrow (C[0, 1], d_\infty)$ s predpisom $id(f) = f$.

Rešitev:

(a) Da.

(b) Ne.

(7) Ugotovi, ali so dani prostori povezani s potmi:

- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$,
- (b) $S^3 = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1\}$,
- (c) $X = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1] \right) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$.

Rešitev:

- (a) Ne.
- (b) Da.
- (c) Da.

(8) Na množico naravnih števil $\mathbb{N}$ uvedemo topologijo τ s predpisom

$$\tau = \{U \subset \mathbb{N} \mid U^c \text{ končna ali } U = \emptyset\}.$$

- (a) Pokaži, da je τ res topologija na množici $\mathbb{N}$.
- (b) Pokaži, da je $(\mathbb{N}, \tau)$ kompakten topološki prostor.

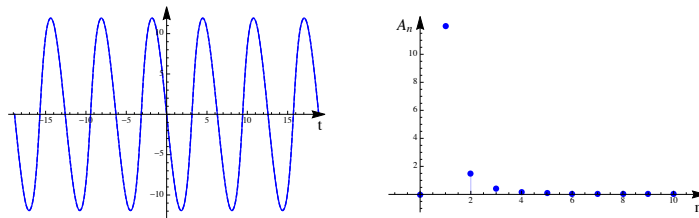
(9) Ugotovi, ali so dani prostori kompaktni:

- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$,
- (b) $S^3 = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1\}$,
- (c) $\text{SO}(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = I, \det(R) = 1\}$.

Rešitev:

- (a) Ne.
- (b) Da.
- (c) Da.

(10) Razvij funkcijo $f(t) = t(t^2 - \pi^2)$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.



Rešitev:

$$f(t) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nt).$$

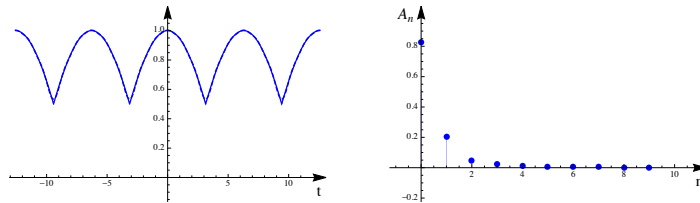
(11) Naj bo $f(t) = \cos(at)$ za nek $a \notin \mathbb{Z}$.

(a) Razvij funkcijo f v kompleksno obliko Fourierove vrste na intervalu $[-\pi, \pi]$.

(b) Razvij funkcijo f v realno obliko Fourierove vrste na intervalu $[-\pi, \pi]$.

(c) Izračunaj vsoto $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a+k}$.

Slika za $a = \frac{1}{3}$:



Rešitev:

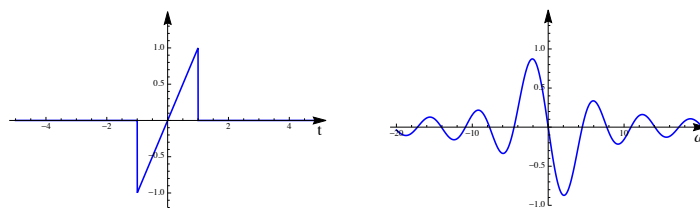
$$(a) f(t) = \frac{a \sin(\pi a)}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2} e^{ikt},$$

$$(b) f(t) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} + \frac{2a \sin(\pi a)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \cos(nt),$$

$$(c) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a+k} = \pi \operatorname{ctg}(\pi a).$$

(12) Izračunaj Fourierovo transformacijo funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(t) = \begin{cases} t; & |t| < 1, \\ 0; & |t| \geq 1. \end{cases}$$



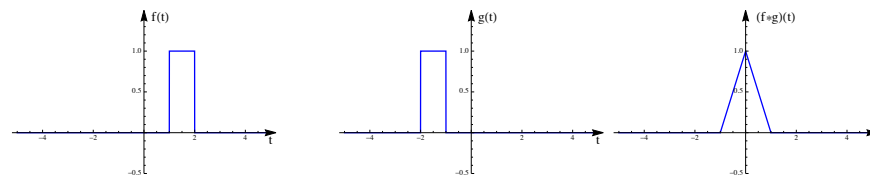
$$\text{Rešitev: } \hat{f}(\omega) = \frac{2i(\omega \cos \omega - \sin \omega)}{\omega^2}.$$

(13) Dani sta funkciji

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ; 1 < t < 2, \\ 0 & ; t \leq 1 \text{ ali } t \geq 2, \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & ; -2 < t < -1, \\ 0 & ; t \leq -2 \text{ ali } t \geq -1. \end{cases}$$

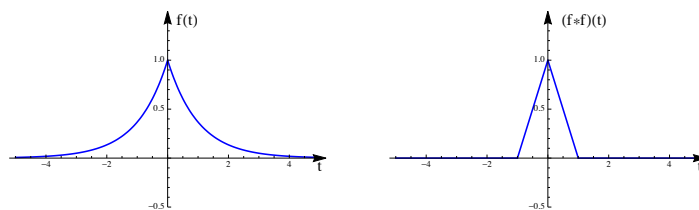
Izračunaj konvolucijo $f * g$.



Rešitev:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 1 - |t| & ; |t| < 1, \\ 0 & ; |t| \geq 1. \end{cases}$$

- (14) Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definirana s predpisom $f(x) = e^{-|x|}$. Izračunaj $f * f$.



Rešitev: $(f * f)(t) = (1 + |t|)e^{-|t|}$.

- (15) Pokaži, da za diskretno Fourierovo transformacijo $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ in za vsak $x \in \mathbb{C}^N$ velja Parsevalova enakost:

$$N \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{x}_n|^2.$$