

Numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb

- 1 Uvod
- 2 Napaka numerične metode
- 3 Enokoračne eksplicitne metode
- 4 Eksplicitne večkoračne metode
- 5 Enokoračne implicitne metode
- 6 Reševanje sistemov diferencialnih enačb prvega reda
- 7 Reševanje diferencialnih enačb višjega reda
- 8 Robni problemi drugega reda

- Osnovni problem: Rešujemo **začetni problem prvega reda**

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = y_a.$$

ali krajše

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_a.$$

- Eksistenčni izrek o rešitvi začetnega problema zagotavlja, da teoretično rešitev (vsaj lokalno) vedno obstaja, če funkcija f zadošča določenim pogojem (če je recimo Lipschitzova na drugo spremenljivko).
- Numerično rešiti zgornji problem seveda **ne pomeni poiskati analitičnega predpisa za y .**

- Numerično začetni problem rešujemo takole:

- ▶ Na intervalu $[a, b]$, kjer iščemo rešitev, izberemo nekaj delilnih točk (privzeli bomo, da so ekvidistantne)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} = x_N = b, \quad h := x_{i+1} - x_i,$$

za $i = 0, 1, \dots, N - 1$.

- ▶ Iščemo **numerične približke** y_i za $y(x_i)$, torej $y_i \approx y(x_i)$.
- ▶ Približke y_i generiramo zaporedoma z **eksplicitno metodo** (nov približek izračunamo neposredno iz prejšnjih) ali z **implicitno metodo** (nov približek dobimo posredno z reševanjem (nelinearne) enačbe).
- ▶ Eksplicitna ali implicitna metoda je lahko **enokoračna** (nov približek y_{n+1} dobimo iz prejšnjega y_n), ali **večkoračna**, nov približek y_{n+1} dobimo iz nekaj prejšnjih, $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}$.

Lokalna in globalna napaka

- **Lokalna napaka** metode je razlika med $y_{n+1} - z(x_{n+1})$, kjer je z rešitev robnega problema $z' = f(x, z)$, $z(x_n) = y(x_n)$.
- **Globalna napaka** je vsota globalne napake na prejšnjem koraku in lokalne napake na zadnjem koraku.
- Lokalna napaka je **reda** $p \in \mathbb{N}$, če je

$$y_{n+1} - z(x_{n+1}) = Ch^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}),$$

kjer je C konstanta, neodvisna od h .

Enokoračne eksplcitne metode

- Eulerjeva metoda (1. reda):

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

- Metoda Runge-Kutta četrtega reda

$$k_1 = h f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = h f(x_n + h/2, y_n + k_1/2),$$

$$k_3 = h f(x_n + h/2, y_n + k_2/2),$$

$$k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad n = 0, 1, \dots$$

- Obstaja cel razred metod Runge-Kutta različnih redov.

Eksplisitne večkoračne metode

- Najbolj znane večkoračne eksplisitne metode so **Adams-Bashforthove metode**.
- Dobimo jih s pomočjo **interpolacijskega polinoma** za funkcijo $f(x, y(x))$.
- Nova vrednost y_{n+1} k -koračne metode je **odvisna od prejšnjih vrednosti** $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k+1}$.
- Primer **dvokoračne Adams-Bashforthove metode** je

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})), \quad n = 0, 1, \dots$$

- Začetne vrednosti $y_{n-k+1}, y_{n-k+2}, \dots, y_n$ določimo z neko **eksplisitno enokoračno metodo** istega reda.

Enokoračne implicitne metode

- Splošna oblika implicitne enokoračne metode je

$$y_{n+1} = \Phi(h, x_n, y_n, y_{n+1}, f).$$

- Neznana količina nastopa torej v enačbi **implicitno (pogosto nelinearno)**.
- Za izračun novega približka **moramo torej rešiti (nelinearno) enačbo**.
- Najpogosteje uporabimo kar **navadno iteracijo** oblike

$$y_{n+1} = \tilde{\Phi}(y_{n+1}),$$

za začetni približek pa vzamemo **približek za y_{n+1} po neki eksplcitni metodi**.

- Trapezna metoda (drugega reda):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})), \quad n = 0, 1, \dots$$

- Navadna iteracija za

$$y_{n+1} = \tilde{\Phi}(y_{n+1}),$$

je konvergentna, če je

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y}(h, x_n, y_n, y, f) \right| \leq 1, \quad y \approx y_{n+1}.$$

- Zgornji pogoj ponavadi lahko vedno **izpolnimo za dovolj majhen h** .

Reševanje sistemov diferencialnih enačb prvega reda

- Rešujemo sistem

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_d),$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_d),$$

$$\vdots$$

$$y_d' = f_d(x, y_1, y_2, \dots, y_d),$$

pri pogojih $y_1(a) = y_{1a}, \dots, y_d(a) = y_{da}$.

- Uporabimo lahko katerokoli metodo za reševanje enačbe prvega reda, prirejeno za sistem.

- Uvedemo notacijo $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_d)^T$, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_d)^T$ in problem prepíšemo v obliko

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}(a) = \mathbf{Y}_a.$$

- Eulerjeva metoda za sistem se tako denimo glasi

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + h \mathbf{F}(x_n, \mathbf{Y}_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Primer

Z Eulerjevo metodo rešite sistem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -y_1, \end{aligned}$$

kjer je $y_1(0) = 0$ in $y_2(0) = 1$. Rešitev poiščite denimo na $[0, 2\pi]$.

Reševanje diferencialnih enačbe višjega reda

- Rešujemo enačbo

$$y^{(k)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)}),$$

pri pogojih $y(a) = y_a, y'(a) = y'_a, \dots, y^{(k-1)}(a) = y_a^{(k-1)}$.

- Uvedemo nove spremenljivke $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_k = y^{(k-1)}$ in problem prevedemo na reševanje sistema diferencialnih enačb prvega reda

$$y'_1 = y_2,$$

$$y'_2 = y_3,$$

$$\vdots$$

$$y'_{k-1} = y_k,$$

$$y'_k = f(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k),$$

pri pogojih $y_1(a) = y_a, y_2(a) = y'_a, \dots, y_k(a) = y_a^{(k-1)}$.

Primer

Poiščite numerično rešitev začetnega problema drugega reda

$$y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

na intervalu $[0, 2\pi]$.

Primer

Poiščite numerično rešitev začetnega problema drugega reda

$$y'' = t y, \quad y(0) = 0.3550, \quad y'(0) = -0.2588,$$

na intervalu $[0, 3]$ in na intervalu $[-10, 0]$.

Robni problemi drugega reda

- Rešujemo enačbo

$$y'' = f(x, y, y'),$$

pri pogojih $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$.

- Ker nimamo dane vrednosti $y'(a) = y'_a$, problema ne moremo neposredno reševati z metodami za začetne probleme.
- Uporabiti moramo drugačne pristope, ki temeljijo bodisi na večkratnem reševanju začetnega problema, bodisi na aproksimaciji odvodov s funkcijskimi vrednostmi.
- Najprej se bomo posvetili linearnim robnim problemom drugega reda.

Linearni robni problem drugega reda

- Linearni robni problem drugega reda v splošnem zapišemo kot

$$\begin{aligned} -y'' + p y' + q y &= r, \\ y(a) &= \alpha, y(b) = \beta. \end{aligned} \tag{1}$$

kjer so p, q, r dane (ponavadi vsaj zvezne) funkcije.

- Prva metoda izkoristi naslednje dejstvo: če sta y_1 in y_2 rešitvi enačbe (1), je rešitev tudi funkcija $y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2, \lambda \in \mathbb{R}$. Ta funkcija tudi zadošča začetnemu pogoju $y(a) = \alpha$.

- Problem rešimo takole:

- ▶ Najprej rešimo dva začetna problema oblike

$$\begin{aligned} -y'' + p y' + q y &= r, \\ y(a) &= \alpha, \quad y'(a) = \delta_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

in rešitvi označimo z $y_i, i = 1, 2$.

- ▶ Funkcija $y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$ je rešitev enačbe (1), obenem pa zadošča pogoju $y(a) = \alpha$.
- ▶ Zahtevamo, da je $y(b) = \beta$, od koder dobimo

$$\lambda = \frac{\beta - y_2(b)}{y_1(b) - y_2(b)}.$$

- ▶ Lahko se sicer zgodi, da je $y_1(b) = y_2(b)$, v tem primeru moramo izbrati tako začetno vrednost $y'(a) = \delta$, da to težavo odpravimo.

Metoda končnih diferenc

Ponovno rešujemo

$$\begin{aligned}-y'' + p y' + q y &= r, \\ y(a) &= \alpha, \\ y(b) &= \beta.\end{aligned}$$

- Izberemo zaporedje delilnih točk
 $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$
- Zaradi enostavnosti predpostavimo, da je

$$h := h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

- Označimo z y_i numerične približke za točne vrednosti $y(x_i).$

- Uporabimo aproksimacije s končnimi diferencami (odtod ime)

$$\begin{aligned}y''(x_i) &\approx \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} \\ &\approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'(x_i) &\approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} \\ &\approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad i = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$

$$y(x_i) \approx y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

- Pišemo $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$ in $r_i = r(x_i)$, upoštevamo $y(x_0) = \alpha$ in $y(x_{n+1}) = \beta$ ter dobimo sistem enačb

$$y_1 (2 + h^2 q_1) + y_2 \left(-1 + \frac{h}{2} p_1 \right) = h^2 r_1 - \alpha \left(-1 - \frac{h}{2} p_1 \right)$$

$$y_{i-1} \left(-1 - \frac{h}{2} p_i \right) + y_i (2 + h^2 q_i) + y_{i+1} \left(-1 + \frac{h}{2} p_i \right) = h^2 r_i$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$y_{n-1} \left(-1 - \frac{h}{2} p_n \right) + y_n (2 + h^2 q_n) = h^2 r_n - \beta \left(-1 + \frac{h}{2} p_n \right)$$

- Sistem lahko zapišemo v **matrični obliki**

$$A \mathbf{y} = \mathbf{d},$$

kjer je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$.

- Ima posebno strukturo, saj je **matrika A tridiagonalna in diagonalno dominantna**.
- Je enolično rešljiv (**Thomasov algoritem**). Časovna in prostorska zahtevnost sta $\mathcal{O}(n)$.

Nelinearni robni problem drugega reda

- Rešujemo splošni robni problem drugega reda

$$y'' = f(x, y, y'),$$

pri pogojih $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$.

- Funkcija f sedaj ni linearno odvisna od y in y' .
- Prejšnjih dveh metod ne moremo uporabiti na enak način kot v primeru linearnega problema.

Metoda končnih diferenc za nelinearni problem

- Kot v linearnem problemu diskretiziramo interval $[a, b]$, torej $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, kjer je spet $h := x_{i+1} - x_i$.
- Uporabimo enake aproksimacije odvodov in vstavimo v diferencilano enačbo

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- Dobimo sistem n nelinearnih enačb za n neznank $y_i, i = 1, 2, \dots, n$.
- Sistem rešimo recimo z Newtonovo metodo za sistem nelinearnih enačb.

Strelnska metoda

- Rešujemo splošni robni problem drugega reda

$$y'' = f(x, y, y'),$$

pri pogojih $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$.

- Funkcija f sedaj ni linearno odvisna od y in y' .
- Problem lahko rešimo kot začetni problem z neko **poljubno začetno vrednostjo** $y'(a) = k_0$. Dobimo rešitev $y(\cdot; k_0)$.
- Seveda izbrani k_0 najbrž ni tak, da bi bil izpolnjen pogoj $y(b; k_0) = \beta$.
- Postopek lahko ponavljamo, seveda pa ne želimo zgolj “**ugibati**”.

- Iščemo torej tako vrednost $k = y'(a)$, da bo za ustrezno rešitev začetnega problema veljalo $y(b; k) = \beta$.
- Naj bo $F(k) = y(b; k) - \beta$. Iščemo rešitev enačbe $F(k) = 0$.
- Uporabimo lahko katerokoli metodo za reševanje nelinearne enačbe.
- Najprimernejša je ponavadi sekantna metoda:

$$k_{r+2} = k_{r+1} - \frac{F(k_{r+1})}{\frac{F(k_{r+1}) - F(k_r)}{k_{r+1} - k_r}}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

- Na vsakem koraku moramo torej rešiti začetni problem z izbrano vrednostjo $y'(a) = k_r$.