

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 1. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

1. julij 2016

1. (25 točk) Naj bo N homogen Poissonov proces z intenziteto $\lambda \in (0, \infty)$; $0 \leq t_1^a \leq t_2^a \leq t_1^b \leq t_2^b < \infty$. Za $d \in \{a, b\}$ označimo z N^d število skokov procesa N znotraj časovnega intervala $(t_1^d, t_2^d]$. Določi porazdelitev $N^a + N^b$.

Rešitev. Izraziti moremo $N^d = N_{t_2^d} - N_{t_1^d}$, $d \in \{a, b\}$. Ker je $0 \leq t_1^a \leq t_2^a \leq t_1^b \leq t_2^b < \infty$ sledi iz neodvisnosti prirastkov procesa N , da je torej N^a neodvisna od N^b . Vemo tudi $N^d \sim \text{Pois}(\lambda(t_2^d - t_1^d))$, $d \in \{a, b\}$. Sledi da je $N^a + N^b \sim \text{Pois}(\lambda(t_2^a - t_1^a + t_2^b - t_1^b))$ ($\text{Pois}(\nu) \star \text{Pois}(\mu) = \text{Pois}(\nu + \mu)$ za $\{\nu, \mu\} \subset [0, \infty)$, kar je znano, oz. sledi iz lastnosti HPP).

2. (25 točk) Naj bo N homogen Poissonov proces z intenziteto $\lambda \in (0, \infty)$. Bodi še $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje njegovih medprihodnih časov in $a \in (0, \infty)$. Definirajmo

$$M_t := \sum_{k=1}^{N_t} \mathbb{1}(T_k > a) \text{ za } t \in [0, \infty).$$

Določi (s.g.) $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t/t$ ter še $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} M_t/t$. Izračun *natančno* utemelji. Ali je M proces štetja? **Nasvet:** Prenovitev z nagradami.

Rešitev. Ker so $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n.e.p. so tudi $(\mathbb{1}(T_i > a))_{i \in \mathbb{N}}$ n.e.p., in so nenegativne. Prav tako vidimo da je T_{i+1} in zato $\mathbb{1}(T_{i+1} > a)$ neodvisna od $\sigma(T_1, \dots, T_i)$ za vsak $i \in \mathbb{N}_0$. N je prenovitveni proces z upanjem "medprenovitvenih časov" $\lambda^{-1} \in (0, \infty)$ (saj je proces štetja s skoki velikosti ena ter medprihodnimi časi, ki so n.e.p. slučajne spremenljivke z vrednostmi v $[0, \infty)$ /slednje samo s.g.; a brez vpliva na izračune z gotovostjo/). Iz izreka o prenovitvah z nagradami zato dobimo da sta obe limiti enaki $\lambda e^{-\lambda a}$, ker je $\mathbf{E} \mathbb{1}(T_1 > a) = \mathbf{P}(T_1 > a) = e^{-\lambda a}$ ter $\mathbf{E} T_1 = \lambda^{-1}$, namreč zaradi $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$. M je proces štetja, ker je nepadajoč, z vrednostmi v \mathbb{N}_0 ($N_t < \infty$ za vsak $t \in [0, \infty)$), in ker so njegove poti z desne zvezne (proces je konstanten na vsakem intervalu na katerem je konstanten proces N , le-ta pa ima z desne zvezne poti).

3. Poissonov proces ima funkcijo intenzitete ρ dano kot

$$\rho(t) = \frac{1}{\max\{t_0, t\}} \text{ za } t \in [0, \infty),$$

kjer je $t_0 \in (0, \infty)$ neka konstanta.

- (a) (7 točk) Ali je $S_2 < \infty$ s.g. (kjer je S_2 drugi prihodni čas)? Zakaj (ne)?
 (b) (18 točk) Določi $P(\min\{T_1, T_2\} > t_0)$, kjer je T_1 prvi, T_2 pa drugi, medprihodni čas.

Rešitev. (a). Da, saj je $\int_0^\infty \rho(t)dt = 1 + \int_{t_0}^\infty \frac{dt}{t} = \infty$. (b). Računamo (poznamo skupno verjetnostno gostoto):

$$\begin{aligned} P(\min\{T_1, T_2\} > t_0) &= P(T_1 > t_0, T_2 > t_0) = \int_{t_0}^\infty dt_1 \int_{t_0}^\infty dt_2 \frac{1}{t_1(t_1 + t_2)} e^{-1 - \log((t_1 + t_2)/t_0)} \\ &= e^{-1} t_0 \int_{t_0}^\infty dt_1 \frac{1}{t_1(t_0 + t_1)} = \log(t_1/(t_0 + t_1))|_{t_1=t_0}^\infty e^{-1} = e^{-1} \log(2). \end{aligned}$$

4. Naj bo $\{\alpha, p_0, t_0, t_1\} \subset (0, \infty)$, $t_0 < t_1$. Študenti rešujejo naloge eden za drugim. Zaporedni časi (dolžine) reševanj posameznih nalog so med seboj neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Asistent nagradi vsakega študenta, ki za reševanje naloge porabi $\leq t_1$ časa s piškotom, katerega cena znaša $p \in (p_0, \infty)$; v tem primeru je piškot izdan ob zaključku reševanja naloge. Čas (dolžina) reševanja posamezne naloge je $\geq t_0$ in ima absolutno zvezno porazdelitev z gostoto $f(t) = \mathbb{1}_{[t_0, \infty)}(t) \frac{p}{p_0} \frac{1}{t_0} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{1+p/p_0}$ (kjer je $t \in \mathbb{R}$) — dražji piškot predstavlja večjo motivacijo. Označimo z N_t število rešenih nalog do in vključno s časom t , z P_t pa denar porabljen za izdane piškote do in vključno s časom t . (Ob času 0 ravno pričnejo z reševanjem prve naloge in izdan ni bil še noben piškot.)

- (a) (12 točk) Določi s.g. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t}$ ter s.g. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_t}{t}$.
 (b) (13 točk) Definirajmo funkcijo

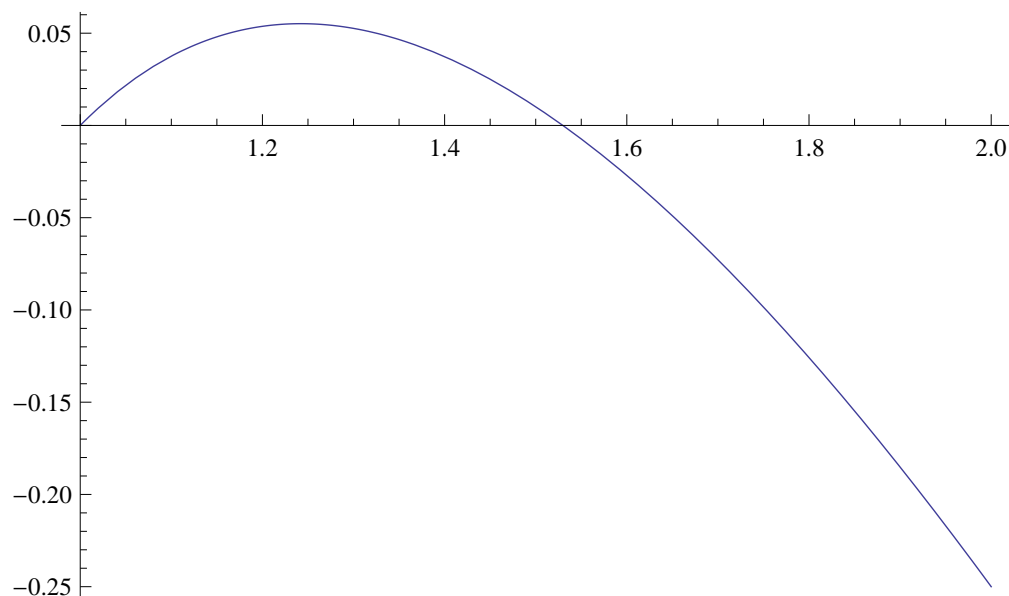
$$g(p) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[\alpha N_t - P_t]}{t}, \quad p \in (p_0, \infty).$$

Izračunaj $g(p)$, $\lim_{p \downarrow p_0} g(p)$, $\lim_{p \rightarrow \infty} g(p)$, ter $\lim_{p \downarrow p_0} g'(p)$. Sklepaj da funkcija g doseže svoj globalni maksimum v stacionarni točki, brž ko je $\alpha > p_0(1 - t_0/t_1)$.

Rešitev. Pišemo lahko $P_t = \sum_{i=1}^{N_t} \mathbb{1}(T_i \leq t_1)p$, kjer je T_i čas reševanje i -te naloge. Ker so $(P_i := \mathbb{1}(T_i \leq t_1)p, i \in \mathbb{N})$ n.e.p. in je $P_{i+1} \perp \sigma(T_1, \dots, T_i)$, $i \in \mathbb{N}$, sledi (iz izreka o prenovitvah z nagradami) da je s.g. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_t}{t} = EP_1/ET_1 = \frac{p(1-(t_0/t_1)^{p/p_0})(1-p_0/p)}{t_0}$ (tihoma smo upoštevali še, da je N prenovitveni proces z upanjem medprenovitvenih časov $\in (0, \infty)$). Iz krepkega zakona velikih števil za prenovitvene procese pa imamo s.g. $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t/t = 1/ET_1 = (1 - p_0/p)/t_0$. Naprej (spet iz izreka o prenovitvah z nagradami, ter iz elementarnega prenovitvenega izreka)

$$g(p)t_0 = (\alpha - p(1 - (t_0/t_1)^{p/p_0}))(1 - p_0/p).$$

Vidimo da je $\lim_{p \downarrow p_0} g(p) = 0$, $\lim_{p \rightarrow \infty} g(p) = -\infty$, ter $p_0 t_0 \lim_{p \downarrow p_0} g'(p) = \alpha - p_0(1 - t_0/t_1)$. Funkcija g je odvedljiva, njena desna limita pri p_0 ima vrednost 0, in če je $\alpha > p_0(1 - t_0/t_1)$, potem na neki desni okolici p_0 ves čas strogo narašča, se pravi nujno zavzame strogo pozitivne vrednosti, v neskončnosti pa gre proti $-\infty$. Supremum vrednosti funkcije g je torej enak supremumu vrednosti funkcije $g|_{[t_0, T]}$



Slika 1: Ad 4. Graf funkcije g na intervalu $(1, 2)$ za $\alpha = t_0 = p_0 = 1$, $t_1 = 2$. Maksimum doseže g v (numerično) $p \doteq 1.24209$.

za nek $t_0 > 0$, $T < \infty$, in ker zvezne funkcije na kompaktnih intervalih dosežejo svoj supremum, funkcija g ima globalni maksimum. Ta je potem stacionarna točka po Fermatevem izreku o lokalnih ekstremih odvedljivih funkcij na odprtih intervalih (vsak globalni ekstrem je tudi lokalni ekstrem).