

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 3. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

8. september 2016

1. Stranke prihajajo v kiosk s hitro prehrano, ki ima en sam izdajni pult, in sicer po ena stranka ob vsakem (strogo pozitivnem, končnem) prihodnem času homogenega Poissonovega procesa N z intenziteto $\lambda \in (0, \infty)$. Ker so “idealno nepotrpežljive”, stranke odidejo brez da so postrežene, razen če ob njihovem prihodu na izdajnem pultu ni v procesu postrežbe nobena druga stranka (izdajni pult je “prost”), v slednjem primeru se jim postrežba takoj prične. (V trenutku, ki zaznamuje konec postrežbe stranke, se šteje da je ta stranka še v procesu postrežbe.) Zaporedne dolžine časov postrežb strank, ki pridejo na prost izdajni pult, so med seboj neodvisne, neodvisne od N , enako porazdeljene, imajo vrednosti v $(0, \infty)$, in upanje $\mu \in (0, \infty)$. Do časa 0 ni bila začeta postrežba še nobeni stranki. Naj bo, za $t \in [0, \infty)$, M_t število strank katerih postrežba se je začela do in vključno s časom t .
 - (a) (5 točk) Utemelji, da je $M = (M_t)_{t \in [0, \infty)}$ proces štetja s skoki velikosti 1 in z $M_0 = 0$.
 - (b) (10 točk) Naj bodo $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ medprihodni časi procesa M . Za $k \in \mathbb{N}$ določi $\mathbf{E}[T_k]$.
 - (c) (10 točk) Izračunaj s.g. $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t/N_t$.

Rešitev. (a). M ima po definiciji vrednosti v \mathbb{N}_0 (ker je $M \leq N$ je M ves čas končen), nepadajoče poti, in je z desne zvezen, saj je konstanten na vsakem intervalu na katerem je N konstanten (torej je M celo lokalno z desne konstanten). Ker do časa 0 ni bila začeta postrežba še nobeni stranki, je $M_0 = 0$. Naprej, ker so skoki N -ja velikosti 1, so tudi skoki M -ja velikosti 1. (b) in (c). T_1 je kar prvi prihodni čas procesa N , in zato $\mathbf{E}T_1 = 1/\lambda$. Iz krepke lastnosti Markova procesa N , in iz neodvisnosti X -a in N -ja, so $(T_i)_{i \geq 2}$ n.e.p., neodvisne od T_1 , in $\mathbf{E}T_k = \mathbf{E}T_2 = \mu + 1/\lambda$ za $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. [[Formalno: Naj bo $X = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje zaporednih dolžin časov postrežb in $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje prihodnih časov procesa N . Ker nas zanimajo samo upanja in s.g. limite, smemo privzeti, da je $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = \infty$ (z gotovostjo, ne samo s.g.). Za $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, je T_k vsota X_{k-1} ter $T_1^{(k-1)}$, kjer je $T_1^{(k-1)}$ prvi prihodni čas procesa prirastkov N -ja po času $T_1 + \dots + T_{k-1} + X_{k-1}$. N je homogen Poissonov proces glede na filtracijo $\mathcal{F}^N \vee \sigma(X)$, ker je zaporedje X neodvisno od N . Časi skokov procesa M so časi ustavljanja glede na $\mathcal{F}^N \vee \sigma(X)$: če nastavimo $\Gamma_1 := 1$ in potem induktivno za $l \in \mathbb{N}$, $\Gamma_{l+1} := \Gamma_l + \inf\{m \in \mathbb{N} : S_{\Gamma_l+m} - S_{\Gamma_l} > X_l\}$, je $(\Gamma_l)_{l \in \mathbb{N}}$ zaporedje časov ustavljanja filtracije $\mathcal{F}^S \vee \sigma(X)$ in za $k \in \mathbb{N}$ lahko čas k -tega skoka procesa M izrazimo kot S_{Γ_k} . (Če je \mathcal{G} filtracija v diskretnem času, A njen čas ustavljanja, B pa čas ustavljanja $\mathcal{G}_{A+} := (\mathcal{G}_{A+t})_{t \in [0, \infty)}$, potem je $A + B$ čas ustavljanja \mathcal{G} . Mimogrede, to velja, ceteris paribus, tudi v zveznem času, če je \mathcal{G} z desne zvezna: začnemo

s primerom, ko B zavzame samo števno mnogo vrednosti, nato naredimo običajno aproksimacijo.) Časi postrežb so tudi (trivialno) časi ustavljanja glede na $\mathcal{F}^N \vee \sigma(X)$. Zato je $T_1 + \dots + T_{k-1} + X_{k-1}$ čas ustavljanja glede na $\mathcal{F}^N \vee \sigma(X)$. Iz krepke lastnosti Markova za homogene Poissonove procese z indukcijo sledi, da so časi $T_1^{(k-1)}$, $k \geq 2$, n.e.-Exp(λ)-p. in neodvisni od $\sigma(X, T_1)$. Sledi da so $(T_i)_{i \geq 2}$ n.e.p., neodvisne od T_1 , in $\mathbb{E}T_k = \mathbb{E}T_2 = \mu + 1/\lambda$ za $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.] V posebnem vidimo da je M prenovitveni proces z zaostankom, željena s.g. limita pa je po krepkem zakonu velikih števil za procesa M in N enaka $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t}{t} / \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \frac{\mathbb{E}T_1}{\mathbb{E}T_2} = (1 + \lambda\mu)^{-1}$ (seveda je tudi N prenovitveni proces z upanjem medprihodnih časov $\mathbb{E}T_1$).

2. (25 točk) Naj bo $\{\mu, \lambda, d\} \subset (0, \infty)$. Zavarovalnica prejema škodne zahteve ob prihodnih časih $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ homogenega Poissonovega procesa N z intenziteto λ . Škodni zahtevek ob času S_n znaša $X_n e^{dS_n}$ ($n \in \mathbb{N}$), kjer je $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje nenegativnih n.e.p. slučajnih spremenljivk z upanjem μ .¹ Kumulativna škoda do časa $t \in [0, \infty)$ se torej izraža kot $S_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(S_n \leq t) e^{dS_n} X_n$. Zaporedje X je neodvisno od procesa N . Za $t \in [0, \infty)$ izračunaj $\mathbb{E}[S_t]$.

Rešitev. Računamo (za $t > 0$)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S_t &= \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(S_n \leq t) e^{dS_n} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \mathbb{1}(S_n \leq t) e^{dS_n} X_n \text{ (Tonelli+linearnost)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \mathbb{1}(S_n \leq t) e^{dS_n} \mathbb{E}X_n = \mu \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \mathbb{1}(S_n \leq t) e^{dS_n} \text{ (neodvisnost)} \\ &= \mu \mathbb{E} \sum_{n=1}^{N_t} e^{dS_n} = \mu \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^k e^{dS_k} \mid N_t = k \right] \end{aligned}$$

in iz lastnosti vrstilnih statistik

$$= \mu \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} k \frac{e^{dt} - 1}{dt} = \mu (e^{dt} - 1) \frac{\lambda}{d}.$$

Končni rezultat velja tudi za $t = 0$.

3. (25 točk) Naj bo $t_0 \in (0, \infty)$; funkcija $\rho : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ naj bo dana z $\rho(t) := \sqrt{t}/(t_0)^{3/2}$ za $t \in [0, \infty)$; končno naj bo N Poissonov proces s funkcijo intenzitete ρ . Določi $\mathbb{P}(N_{t_0} \leq 1, S_2 > 2t_0)$.

Rešitev. Ker je $\{S_2 > 2t_0\} = \{N_{2t_0} \leq 1\}$ in $\{N_{t_0} \leq 1\} = \{N_t = 0\} \cup \{N_{t_0} = 1\}$, je željena verjetnost enaka

$$\mathbb{P}(N_{t_0} = 0, N_{2t_0} \leq 1) + \mathbb{P}(N_{t_0} = 1, N_{2t_0} \leq 1)$$

¹ d lahko interpretiramo kot konstantno zvezno inflacijsko stopnjo.

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{P}(N_{t_0} = 0, N_{2t_0} - N_{t_0} \leq 1) + \mathbf{P}(N_{t_0} = 1, N_{2t_0} - N_{t_0} = 0) \\
&= \mathbf{P}(N_{t_0} = 0, N_{2t_0} - N_{t_0} = 0) + \mathbf{P}(N_{t_0} = 0, N_{2t_0} - N_{t_0} = 1) + \mathbf{P}(N_{t_0} = 1, N_{2t_0} - N_{t_0} = 0). \\
&\text{Ker je } N_{t_0} \sim \text{Pois}(\int_0^{t_0} \sqrt{t}/(t_0)^{3/2} dt = 2/3) \text{ in } N_{2t_0} - N_{t_0} \sim \text{Pois}(\int_{t_0}^{2t_0} \sqrt{t}/(t_0)^{3/2} dt = \\
&\frac{2}{3}(2^{3/2} - 1)) \text{ ter iz neodvisnosti prirastkov, je to končno enako } (1 + 2^{5/2}/3)e^{-2^{5/2}/3}.
\end{aligned}$$

4. Naj bo $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e. – s porazdelitveno funkcijo F – p. slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $[0, \infty)$. Definirajmo: $S_n := \sum_{i=1}^n T_i$ za $n \in \mathbb{N}_0$ (seveda, $S_0 = 0$), ter $N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(S_n \leq t)$ za $t \in [0, \infty)$ – pripadajoči prenovitveni proces. Fiksirajmo končno $\xi \in [0, \infty)$, in definirajmo čas $L := \inf\{t \in [0, \infty) : t - S_{N_t} \geq \xi\}$ (prvi čas, ko ξ dolgo nismo videli nobenega prihoda). Predpostavimo, da je $F(\xi) < 1$.

- (a) (12 točk) Dokaži, da je $L < \infty$ s.g.
(b) (13 točk) Pokaži, da porazdelitvena funkcija F_L slučajne spremenljivke L zadošča konvolucijski enačbi $F_L = z + F_L \star G$, kjer je $G := F\mathbb{1}_{(-\infty, \xi]} + F(\xi)\mathbb{1}_{(\xi, \infty)}$ defektna porazdelitvena funkcija in $z := (1 - F(\xi))\mathbb{1}_{[\xi, \infty)}$.

Rešitev. (a). $\{L = \infty\} \subset \cap_{i=1}^n \{T_i \leq \xi\}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Verjetnost slednjega dogodka je zaradi neodvisnosti $= (F(\xi))^n \rightarrow 0$ ko $n \rightarrow \infty$ (ker je $F(\xi) < 1$). (b). Očitno je $F_L(t) = 0$ za $t \in (-\infty, \xi)$, od koder vidimo da velja $F_L = z + F_L \star G$ na $(-\infty, \xi)$. Naj bo sedaj $t \in [\xi, \infty)$. Potem s pogojevanjem na T_1 dobimo

$$\begin{aligned}
F_L(t) &= \mathbf{P}(L \leq t, T_1 > \xi) + \mathbf{P}(L \leq t, T_1 \leq \xi) = \mathbf{P}(T_1 > \xi) + \mathbf{E}[\mathbf{P}(L \leq t, T_1 \leq \xi | T_1)] \\
&= 1 - F(\xi) + \int_{[0, \xi]} F_L(t - y) dF(y),
\end{aligned}$$

iz prenovitvene lastnosti ob času T_1 , končno

$$F_L(t) = 1 - F(\xi) + \int_{[0, t]} F_L(t - y) dG(y),$$

torej velja $F_L = z + F_L \star G$ tudi na $[\xi, \infty)$.