

# SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 1. kolokvij

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

11. april 2016

1. Naj bo  $N$  homogen Poissonov proces z intenziteto  $\lambda \in (0, \infty)$ . Bodi  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje njegovih prihodnih časov.

(a) (12 točk) Za  $\{s, t\} \subset [0, \infty)$  določi  $\text{cov}(N_s, N_t)$ .

(b) (13 točk) Za  $\{i, j\} \subset \mathbb{N}$  določi  $\text{cov}(S_i, S_j)$ .

**Rešitev.** (b). Računamo. Naj bo  $i \leq j$ . Zaradi bilinearnosti cov, neodvisnosti in znane porazdelitve  $S_i \sim \Gamma(i, \lambda)$  imamo:  $\text{cov}(S_i, S_j) = \text{cov}(S_i, S_i + (S_j - S_i)) = \text{cov}(S_i, S_i) = \text{var}(S_i) = i/\lambda^2$ . V splošnem torej  $\text{cov}(S_i, S_j) = (i \wedge j)/\lambda^2$ .

(a). Računamo. Naj bo  $s \leq t$ . Spet je zaradi neodvisnosti in znane porazdelitve  $N_s \sim \text{Pois}(\lambda s)$ :  $\text{cov}(N_s, N_t) = \text{cov}(N_s, N_s + N_t - N_s) = \text{cov}(N_s, N_s) = \text{var}(N_s) = \lambda s$ . V splošnem torej  $\text{cov}(N_s, N_t) = \lambda(s \wedge t)$ .

2. Naj bo  $N$  homogen Poissonov proces z intenziteto  $\lambda \in (0, \infty)$ . Bodi še  $T := (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje njegovih medprihodnih časov, in  $a \in (0, \infty)$ . Definirajmo

$$L := \inf\{k \in \mathbb{N} : T_k \leq a\},$$

zaporedno številko prvega prihoda na katerega ne čakamo dlje kot  $a$ .

(a) (10 točk) Dokaži da je  $L$  čas ustavljanja glede na naravno filtracijo procesa  $T$ .

(b) (10 točk) Določi porazdelitev slučajne spremenljivke  $L$  ter  $\mathbb{E}[L]$ .

(c) (5 točk) Izračunaj  $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^L T_k]$ .

**Rešitev.** Za  $k \in \mathbb{N}$  je  $\{L \leq k\} = \cup_{i=1}^k \{T_i \leq a\} \in \sigma(T_1, \dots, T_k)$ , sledi prvi del. Naprej je za  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(L > k) = \mathbb{P}(T_1 > a, \dots, T_k > a) = (e^{-\lambda a})^k$ , v posebnem  $\mathbb{P}(L = \infty) = 0$ , in zato  $L \sim \text{geom}_{\mathbb{N}}(1 - e^{-\lambda a})$ . Sledi da je  $\mathbb{E}L = 1/(1 - e^{-\lambda a})$  in iz Waldove identitete  $\mathbb{E} \sum_{k=1}^L T_k = \mathbb{E}L \mathbb{E}T_1 = (\lambda(1 - e^{-\lambda a}))^{-1}$ , ker so  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n.e.p. nenegativne, in je  $T$  čas ustavljanja glede na njihovo naravno filtracijo.

3. Naj bo  $N$  homogen Poissonov proces z intenziteto  $\lambda \in (0, \infty)$ . Bodi  $S := (S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  zaporedje njegovih prihodnih časov ( $S_0 := 0$ );  $T := (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pa zaporedje njegovih medprihodnih časov. Fiksirajmo še  $t \in (0, \infty)$ .

(a) (10 točk) Določi  $\mathbb{E}[S_{N_t+1}]$ .

- (b) (10 točk) Določi  $E[S_{N_t}]$ . **Opomba.** Možna 'linija napada' — časovno *ne* najbolj ugodna — je s pogojevanjem na  $N_t$ ; v tem primeru ti bo morda v pomoč vrsta  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{(k-1)!(k+1)} = \frac{1-e^a+ae^a}{a}$  za (npr.)  $a \in (0, \infty)$ .
- (c) (5 točk) Koliko je  $E[T_{N_t+1}]$ ? Ali je  $T_{N_t+1} \sim \text{Exp}(\lambda)$ ? Ali je  $T_{N_t+2} \sim \text{Exp}(\lambda)$ ?

**Rešitev.** (a). Zaporedje  $T$  je nenegativno, s konstantnim upanjem, in ima neodvisne vrednosti glede na filtracijo  $\mathcal{F}^T$ ,  $N_t + 1$  pa je njen čas ustavljanja. Ker je po definiciji prihodnih in medprihodnih časov še  $S_{N_t+1} = \sum_{i=1}^{N_t+1} T_i$  nam Waldova identiteta takoj da  $ES_{N_t+1} = ET_1(EN_t + 1) = t + \lambda^{-1}$ , kjer smo upoštevali  $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$  ter  $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$ . Alternativno:  $S_{N_t+1} = E_t + t$ ,  $E_t \sim \text{Exp}(\lambda)$ , od koder spet željeni rezultat.

(b). Računamo lahko s pogojevanjem na  $N_t$ :  $ES_{N_t} = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_t = k)E[S_k|N_t = k] = \sum_{k=1}^{\infty} P(N_t = k)E[S_k|N_t = k]$ . Za  $k \in \mathbb{N}$  je, pogojno na  $\{N_t = k\}$ , porazdelitev  $S_k$  enaka maksimumu  $k$  neodvisnih, enako — enakomerno na intervalu  $[0, t]$  — porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Torej je  $P(S_k > s|N_t = k) = 1 - (s/t)^k$  za  $s \in [0, t]$ , in  $E[S_k|N_t = k] = \int_0^t (1 - (s/t)^k) ds = t(1 - (k+1)^{-1}) = kt/(k+1)$ . Sledi  $ES_{N_t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \frac{kt}{k+1} = te^{-\lambda t} \frac{1-e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}}{\lambda t} = t - \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t})$ . Alternativno je  $S_{N_t} = t - A_t$ , kjer je  $A_t \sim \tilde{A}_t \wedge t$ ,  $\tilde{A}_t \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Potem je  $EA_t = \int_0^{\infty} P(\tilde{A}_t \wedge t > s) ds = \int_0^t e^{-\lambda s} ds$ , kar da seveda isti rezultat.

(c). Dobimo  $E[T_{N_t+1}] = E[S_{N_t+1}] - E[S_{N_t}] = \lambda^{-1}(2 - e^{-\lambda t})$ . (Mimogrede,  $T_{N_t+1} = A_t + E_t$ .) Seveda potem  $T_{N_t+1}$  nima  $\text{Exp}(\lambda)$  porazdelitve, ker njeno upanje ni  $\lambda^{-1}$ . Iz krepke lastnosti Markova za zaporedja z n.e.p. slučajnimi spremenljivkami sledi da je  $T_{N_t+2} \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

4. Vzemimo  $N$ , homogen Poissonov proces z intenziteto  $\lambda \in (0, \infty)$ , in  $O = (O_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zaporedje n.e.-Ber(1/2)-p. slučajnih spremenljivk, neodvisno od  $N$ . Nekemu podjetju se ponujajo poslovne priložnosti ob prihodnih časih procesa  $N$ ,  $i$ -to priložnost podjetje izkoristi če je  $O_i = 1$ , in jo zapravi sicer ( $i \in \mathbb{N}$ ).
- (a) (8 točk) Naj bo  $t \in (0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Pogojno na dogodku  $\{N_t = n\}$ , kakšna je verjetnost da bo podjetje v intervalu  $(0, t]$  izkoristilo vsaj polovico vseh ponujenih priložnosti? **Nasvet.** Za lihe in za sode  $n$ -je bo odgovor različen.
- (b) (7 točk) Za  $t \in (0, \infty)$ , razloži zakaj je verjetnost da bo podjetje v intervalu  $(0, t]$  izkoristilo vsaj polovico vseh ponujenih priložnosti enaka  $P(N_t^I \geq N_t^Z)$ , kjer sta  $N_t^I$  ter  $N_t^Z$  neodvisni in obe porazdeljeni  $\text{Pois}(\lambda t/2)$ .
- (c) (8 točk) Za  $t \in (0, \infty)$  izrazi, s pogojevanjem na  $N_t$ , verjetnost da bo podjetje v časovnem intervalu  $(0, t]$  izkoristilo vsaj polovico vseh ponujenih priložnosti. Pomagaj si s točko (a). (Verjetnost boš lahko izrazil z modificirano Besselovo funkcijo prve vrste  $I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2}$  (kjer je  $z \in \mathbb{R}$ ).)
- (d) (2 točki) Če sta  $U$  in  $V$  torej neodvisni slučajni spremenljivki, obe s porazdelitvijo  $\text{Pois}(\mu)$ ,  $\mu \in (0, \infty)$ , kako se z Besselovo funkcijo  $I_0$  izraža  $P(U \geq V)$ ?

**Rešitev.** (a). Naj bo  $I = \sum_{i=1}^{N_t} O_i$  število izkoriščenih,  $Z = N_t - I$  pa število zapravljenih priložnosti v intervalu  $(0, t]$ . Če je  $n$  sod, potem je  $P(I \geq n/2|N_t = n) + P(Z \geq n/2|N_t = n) - P(I = Z = n/2|N_t = n) = 1$ , in zaradi simetrije in neodvisnosti  $P(I \geq n/2|N_t = n) = \frac{1}{2}(1 + \binom{n}{n/2}/2^n)$ . Če je  $n$  lih, pa je  $P(I \geq n/2|N_t = n) + P(Z \geq n/2|N_t = n) = 1$  in spet iz simetrije  $P(I \geq n/2|N_t = n) = 1/2$ .

(c). S pogojevanjem na število prihodov v intervalu  $(0, t]$  imamo torej da je željena verjetnost enaka

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2l}}{(2l)!} \binom{2l}{l} \frac{1}{2^{2l}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\frac{\lambda t}{2})^{2l}}{(l!)^2} = (1 + e^{-\lambda t} I_0(\lambda t))/2.$$

(b). Naj bo  $N^I$  proces štetja izkoriščenih,  $N^Z$  pa proces štetja zapravljenih priložnosti. Naša verjetnost je tudi enaka verjetnosti da izkoristimo vsaj toliko priložnosti kot jih zapravimo, se pravi (iz markacij HPP /gre za markiranje HPP procesa  $N$  z označbami  $M$ /)  $\mathbf{P}(N_t^I \geq N_t^Z)$ , kjer sta  $N_t^I$  ter  $N_t^Z$  neodvisni in obe porazdeljeni  $\text{Pois}(\lambda t/2)$ . (d). Sledi  $\mathbf{P}(U \geq V) = (1 + e^{-2\mu} I_0(2\mu))/2$  (verjetnosti se tičejo samo porazdelitev).