

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 2. kolokvij

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

10. junij 2016

1. Bodi $t_0 \in (0, \infty)$. Naj bo N Poissonov proces s funkcijo intenzitete ρ ; $\rho(t) = \frac{1}{t_0} e^{-t/t_0}$ za $t \in [0, \infty)$.
 - (a) (10 točk) Za $0 \leq t \leq T < \infty$ določi $P(N_t = N_T)$.
 - (b) (10 točk) Za $t \in [0, \infty)$ določi $P(\cap_{T \in [t, \infty)} \{N_t = N_T\})$, verjetnost da na (t, ∞) proces N nima nobenega skoka.
 - (c) (5 točk) Naj bo S čas zadnjega skoka procesa N , pri čemer vzamemo $S = \infty$ na dogodku da ima N neskončno mnogo skokov, ter $S = 0$ na dogodku da N nima nobenega skoka. Za $t \in [0, \infty)$ določi $P(S \leq t)$. Koliko je $P(S < \infty)$? Koliko je $P(S = 0)$?

Rešitev. (a). $P(N_t = N_T) = P(N_T - N_t = 0) = \exp\{-\int_t^T \rho(s)ds\} = \exp\{e^{-T/t_0} - e^{-t/t_0}\}$, kjer smo upoštevali $N_T - N_t \sim \text{Pois}(\int_t^T \rho(s)ds)$. (a). Iz monotonosti poti je $\cap_{T \in [t, \infty)} \{N_T = N_t\} = \cap_{T \in [t, \infty) \cap \mathbb{N}} \{N_T = N_t\}$ nenaraščajoč presek, in nato iz zveznosti verjetnosti, $P(\cap_{T \in [t, \infty)} \{N_T = N_t\}) = \lim_{T \rightarrow \infty} P(N_t = N_T) = e^{-e^{-t/t_0}}$. (c). Iz $\{S \leq t\} = \cap_{T \in [t, \infty)} \{N_T = N_t\}$ sledi da je za $t \in [0, \infty)$, $P(S \leq t) = e^{-e^{-t/t_0}}$. Sledi $P(S < \infty) = 1$ ter $P(S = 0) = e^{-1}$.

2. (25 točk) Za $i \in \{1, 2\}$ naj bo N^i Poissonov proces z zvezno funkcijo intenzitete ρ_i . Denimo da sta N^1 in N^2 neodvisna, in je $\int_0^\infty \rho_1(u)du = \infty$ ter $\int_0^\infty \rho_2(u)du = \infty$. Naj bodo še $(S_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ prihodni časi N^i , $i \in \{1, 2\}$. Dokaži, da je $P(\{S_i^1 = S_j^2\}) = 0$ kadarkoli je $\{i, j\} \subset \mathbb{N}$. Zakaj je potem

$$P(\cup_{i \in \mathbb{N}} \cup_{j \in \mathbb{N}} \{S_i^1 = S_j^2\}) = 0?$$

Namig. Če je slučajni vektor (X, Y) (z vrednostmi v \mathbb{R}^2) absolutno zvezen, je $P(X = Y) = 0$. Tega ti ni potrebno dokazati.

Rešitev. Npr. števna subaditivnost, absolutna zveznost in neodvisnost: zaradi $\int_0^\infty \rho_1(u)du = \infty$ ter $\int_0^\infty \rho_2(u)du = \infty$ so S_i^1 in S_j^2 slučajne spremenljivke z vrednostmi v \mathbb{R} (s.g.; brez vpliva na verjetnosti z gotovostjo) – vemo, absolutno zvezne, kot komponente absolutno zveznih slučajnih vektorjev; zaradi neodvisnosti je (S_i^1, S_j^2) absolutno zvezen slučajni vektor kadarkoli je $\{i, j\} \subset \mathbb{N}$; števna subaditivnost pa da $P(\cup_{i \in \mathbb{N}} \cup_{j \in \mathbb{N}} \{S_i^1 = S_j^2\}) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} P(\{S_i^1 = S_j^2\}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} 0 = 0$.

Remark: Other things being equal, it enough to assume only that $\int_0^\infty \rho_1(u)du = \infty$ without insisting that also $\int_0^\infty \rho_2(u)du = \infty$. For, we then still have, thanks to independence of N^1 and N^2 , by the Image measure and Tonelli's theorems $P(S_i^1 = S_j^2) = \int_{[0,\infty]} P(S_i^1 = t) P_{S_j^2}(dt) = \int_{[0,\infty]} 0 P_{S_j^2}(dt) = 0$. Conversely, if $\int_0^\infty \rho_1(u)du < \infty$ and $\int_0^\infty \rho_2(u)du < \infty$, then again thanks to independence $P(S_1^1 = S_1^2) \geq P(S_1^1 = \infty, S_1^2 = \infty) = P(S_1^1 = \infty)P(S_1^2 = \infty) > 0$.

3. (25 točk) Naj bo $\{\lambda, \mu, \rho\} \subset (0, \infty)$, $a \in [0, \infty)$. Kolesar vozi izmenjaje 'neprevidno' in 'previdno': spočetka neprevidno do časa, ko mu je izrečena prva globa za cestni prekršek (v nadaljevanju, globa), nato za razdobje dolžine a vozi previdno, nato spet neprevidno do časa, ko mu je izrečena prva naslednja globa, nato previdno za razdobje dolžine a itd. itn. Izmenjujejo se torej obdobja neprevidne in previdne vožnje, pri čemer v obdobju previdne vožnje kolesar vedno vztraja časovno razdobje dolžine a ; globe pa so izrečene natanko ob zaključkih obdobj neprevidne vožnje, ob vsakem takem zaključku obdobja neprevidne vožnje je izrečena natanko ena globa.

Dolžine obdobj neprevidne vožnje modeliramo kot strogo pozitivne, neodvisne, enako, $\text{Exp}(\lambda)$, porazdeljene slučajne spremenljivke. Velikosti glob so prav tako neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke, neodvisne od dolžin neprevidne vožnje, so nenegativne, z matematičnim upanjem μ . Kakšen mora biti minimalen a , da kolesar "na dolgi rok" (s.g. in v upanju) ne bo dobival več kot ρ (denarnih enot na enoto časa) glob?

Rešitev. Zaključki obdobj previdne vožnje konstituiraajo prenovitvene trenutke prenovitvenega procesa N z upanjem medprihodnih časov $\lambda^{-1} + a$. Naj bodo še $(G_i)_{i \geq 1}$ zaporedne višine izrečenih glob. Če W označuje proces kumulativnega zneska glob, velja $\sum_{i=1}^{N_t} G_i \leq W_t \leq \sum_{i=1}^{N_t+1} G_i$ za $t \in [0, \infty)$. Iz izreka o prenovitvah z nagradami (vsi pogoji so izpolnjeni!) dobimo da s.g. in v upanju W_t/t kovergira k $\mu/(\lambda^{-1} + a)$. To naj bo $\leq \rho$, ekvivalentno $a \geq \frac{\mu}{\rho} - \lambda^{-1}$, torej je minimalen a enak $0 \vee (\frac{\mu}{\rho} - \lambda^{-1})$. [Alternativno lahko obravnavamo trenutke prejema glob kot prenovitvene trenutke v prenovitvenem procesu z *zaostankom* N . Tedaj je celo $\sum_{i=1}^{N_t} G_i = W_t$; izrek o prenovitvah z nagradami pa velja tudi za prenovitvene procese z zaostankom.]

4. (25 točk) Naj bo $\lambda \in (0, \infty)$. Porazdelitvena funkcija F medprihodnih časov prenovitvenega procesa s skoki velikosti 1, je dana kot $F(t) = (1 - \frac{1}{2}(e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t})) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$ za $t \in \mathbb{R}$. Določi prenovitveno mero!

Rešitev. S standardnimi oznakami je $\hat{M} = \hat{F}/(1-\hat{F})$, kjer je $\hat{F}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{u+\lambda} + \frac{2\lambda}{u+2\lambda})$, $u \geq 0$. Sledi $\hat{M}(u) = \frac{3\lambda u + 4\lambda^2}{u(2u+3\lambda)} = \frac{4\lambda}{3u} + \frac{1}{9} \frac{3\lambda/2}{u+3\lambda/2}$, $u > 0$, preko razcepa na parcialne ulomke; torej iz injektivnosti ter linearnosti Laplace-Stieltjesove transformacije $M(t) = \frac{4\lambda t}{3} + \frac{1}{9}(1 - e^{-3\lambda t/2})$, $t \in [0, \infty)$.