

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 2. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

31. avgust 2016

1. Naj bo N homogen Poissonov proces na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ z intenzivnostjo $\lambda \in (0, \infty)$, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje njegovih prihodnih časov, $f : (0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ Borelovo merljiva funkcija. Spodnji integral proti du interpretiramo v Lebesguovem smislu.
- (a) (15 točk) Dokaži da je, za $t \in [0, \infty)$, $\mathbf{E}[\sum_{k=1}^{N_t} f(S_k)] = \lambda \int_0^t f(u) du$. **Nasvet:** Za $t > 0$ pogoji na N_t .
- (b) (5 točk) Koliko je potem $\mathbf{E}[\sum_{k=1}^{\infty} f(S_k)]$? Utemelji.
- (c) (5 točk) Za vsak $\omega \in \Omega$ je pot $N(\omega)$, se pravi funkcija $[0, \infty) \ni t \mapsto N_t(\omega) \in \mathbb{R}$, nepadajoča in z desne zvezna in $N_0(\omega) = 0$. Če jo razširimo z 0 na $(-\infty, 0)$ lahko definiramo slučajno spremenljivko $\int_{(0, \infty)} f dN$ preko

$$\left(\int_{(0, \infty)} f dN \right) (\omega) := \int_{(0, \infty)} f(s) dN_s(\omega) \text{ za } \omega \in \Omega$$

v Lebesgue-Stieltjesovem smislu. Koliko je $\mathbf{E}[\int_{(0, \infty)} f dN]$?

Notacija: Zgoraj je, za $k \in \mathbb{N}$, $f(S_k) := f \circ S_k$ (kompozitum funkcij).

Rešitev. (a). S pogojevanjem na N_t , in iz lastnosti vrstilnih statistik, imamo za $t > 0$, $\mathbf{E}[\sum_{k=1}^{N_t} f \circ S_k] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} k \int_0^t f(u) du / t = \lambda \int_0^t f(u) du$, kjer smo v splošnem primorani interpretirati integral v Lebesguovem smislu. Formula obvelja tudi pri $t = 0$. (b). Iz prejšnje točke dobimo z monotono konvergenco, v limiti $\mathbb{N} \ni t \rightarrow \infty$, $\mathbf{E}[\sum_{k=1}^{N_\infty} f \circ S_k] = \lambda \int_{(0, \infty)} f(t) dt$. Upoštevamo še, da je za HPP $\mathbf{P}(N_\infty = \infty) = 1$, in torej $\mathbf{E}[\sum_{k=1}^{N_\infty} f \circ S_k] = \mathbf{E}[\sum_{k=1}^{\infty} f \circ S_k]$. (c). N ima skoke velikosti 1 ob svojih prihodnih časih. Torej je ravno $\int_{(0, \infty)} f dN = \sum_{k=1}^{\infty} f \circ S_k$ (v posebnem vidimu da je ta preslikava merljiva, torej res slučajna spremenljivka), se pravi

$$\mathbf{E} \int_{(0, \infty)} f dN = \lambda \int_0^\infty f(t) dt.$$

Alternative (measure-theoretic heavy) solution. We begin by noting that $\int_{(0, \infty)} f dN = \sum_{k=1}^{\infty} f \circ S_k$. We then see that $\mathbf{E} \int_{(0, \infty)} f dN = \lambda \int_0^\infty f(u) du$: (i) first for f of the form $\mathbb{1}_{(0, a]}$, $a \in [0, \infty)$ (since then $\int_{(0, \infty)} f dN = N_a \sim \text{Pois}(\lambda a)$); and (ii) then for all f by a “monotone class argument”, noting that $\{(0, a] : a \in [0, \infty)\}$ is a π -system generating $\mathcal{B}((0, \infty))$: one uses linearity and monotone convergence of the integral, the π/λ (Dynkin’s) lemma, and approximation by simple function. Part (a) is a special case if we replace f by $f \mathbb{1}_{(0, t]}$.

2. (25 točk) Naj bo N homogen Poissonov proces z intenziteto $\lambda \in (0, \infty)$; $a \in [0, \infty)$. Definirajmo $W := \inf\{t \in [0, \infty) : t - S_{N_t} \geq a\}$, kjer je $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje prihodnih časov procesa N in $S_0 := 0$. Določi $\mathbb{E}[W]$. **Nasvet:** Za ustrezen diskreten čas Q zapiši W kot $\sum_{k=1}^Q \min\{T_k, a\}$, kjer je $(T_i)_{i \geq 1}$ zaporedje medprihodnih časov procesa N .

Rešitev. W je prvi čas, ko je od zadnjega prihoda (oz. od začetka, če takega prihoda ni) minilo razdobje dolžine vsaj a (mimogrede, W je čas ustavljanja glede na naravno filtracijo N ; $\{W \leq t\} = \cup_{k \in \mathbb{N}_0} \{S_k \leq t\} \cap \{S_{k+1} > t\} \cap \{t - S_k \geq a\}$ za $t \in [0, \infty)$). Naj bo $(T_i)_{i \geq 1}$ zaporedje medprihodnih časov procesa N , \mathcal{G} njegova naravna filtracija. Potem je $W = \sum_{k=1}^Q T_k \wedge a$, kjer je $Q := \inf\{k \in \mathbb{N} : T_k > a\}$. Seveda je $(T_k \wedge a)_{k \in \mathbb{N}}$ zaporedje nenegativnih slučajnih spremenljivk, ki si delijo isto upanje $\int_0^a te^{-\lambda t} \lambda dt + ae^{-\lambda a} = \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda a} - \lambda ae^{-\lambda a}) + ae^{-\lambda a}$, $T_{k+1} \wedge a$ je neodvisna od \mathcal{G}_k za vse $k \in \mathbb{N}_0$, in Q je čas ustavljanja glede na \mathcal{G} . Iz Waldove identitete sledi $\mathbb{E}W = \mathbb{E}[Q]\mathbb{E}[T_1 \wedge a]$. Ker so medprihodni časi neodvisni enako $\text{Exp}(\lambda)$ porazdeljeni, in zato $Q \sim \text{geom}_{\mathbb{N}}(e^{-\lambda a})$, imamo $\mathbb{E}Q = e^{\lambda a}$, skupaj $\mathbb{E}W = (e^{\lambda a} - 1)/\lambda$.

Opomba. Iz desne zveznosti poti procesa N vidimo tudi, da je $W = \inf\{t \in [0, \infty) : t - S_{N_t} > a\}$.

3. (25 točk) Naj bo $\{a, b\} \subset (0, \infty)$. Emisijo gamma žarkov (fotonov) v radioaktivnem izotopu modeliramo s Poissonovim procesom N ($N_t =$ število izsevanih fotonov do in vključno s časom t) s funkcijo intenzitete $\rho(t) = ae^{-bt}$ (kjer je $t \in [0, \infty)$). Naj bo $u \in (0, \infty)$. Določi verjetnost da je izsevan natanko en foton, in ta strogo po času u .

Rešitev. Računamo. $\mathbb{P}(N_u = 0, N_\infty - N_u = 1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_u = 0, N_T - N_u = 1) = \mathbb{P}(N_u = 0) \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_T - N_u = 1) = e^{-\int_0^u ae^{-bs} ds} \lim_{T \rightarrow \infty} (\int_u^T ae^{-bs} ds) e^{-\int_u^T ae^{-bs} ds} = e^{-a/b - bu \frac{a}{b}}$, kjer sledi prva enakost iz omejene konvergence, druga pa iz neodvisnosti prirastkov N -ja.

4. (25 točk) Dano je zaporedje $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ neodvisnih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $[0, \infty)$ ter konstanta $r \in (0, \infty)$. $(T_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ so enako porazdeljene z upanjem μ_1 ; $(T_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ so tudi enako porazdeljene z upanjem μ_2 ; $\mu_1 + \mu_2 \in (0, \infty)$. Naj bo $S_n := T_1 + \dots + T_n$ za $n \in \mathbb{N}_0$ (seveda, $S_0 = 0$) in definirajmo še $R_t = r \int_0^t \sum_{k=0}^\infty \mathbb{1}_{(S_{2k}, S_{2k+1}]}(u) du$ za $t \in [0, \infty)$. Določi s.g. $\lim_{t \rightarrow \infty} R_t/t$ ter tudi $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}R_t/t$. **Nasvet.** Morda pomaga tale interpretacija: sistem *alternira* med stanjema 1 in 2: v stanju 1 je razdobje dolžine T_1 , nato v stanju 2 razdobje dolžine T_2 , nato spet v stanju 1 razdobje dolžine T_3 , nato spet v stanju 2 razdobje dolžine T_4 itd. itn. V stanju 1 prejemo nagrado r (na enoto časa), v stanju 2 pa nagrade ne prejemo. Potem je R_t ravno kumulativna nagrada zbrana do in vključno s časom t .

Rešitev. $\tilde{T}_k := T_{2k-1} + T_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, so n.e.p. z upanjem $\mu_1 + \mu_2$. Če je N pripadajoči prenovitveni proces in definiramo $\bar{R}_i := rT_{2i-1}$ za $i \in \mathbb{N}$, je za vse $t \in [0, \infty)$, $\sum_{i=1}^{N_t} \bar{R}_i \leq R_t \leq \sum_{i=1}^{N_t+1} \bar{R}_i$. Naprej $(\bar{R}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ so n.e.p., nenegativne, z upanjem $r\mu_1$, in za vsak $i \in \mathbb{N}$ je \bar{R}_{i+1} neodvisna of $\sigma(\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_i)$. Iz izreka o prenovitvah z nagradami sledi da sta obe limiti enaki $r\mu_1/(\mu_1 + \mu_2)$.