

Analiza 1

1. izpit

15. 6. 2016

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Vsaka naraščajoča funkcija $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je Riemannovo integrabilna na $[0, 1]$.



Vsaka zvezna funkcija $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ je enakomerno zvezna.



Zaporedje, ki je naraščajoče in navzdol omejeno, je konvergentno.



Za vsako zvezno funkcijo $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ obstaja taka odvedljiva funkcija $F : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, da za vsak $x \in (-1, 1)$ velja $F'(x) = f(x)^2 + 1$.



Če je funkcija f neskončnokrat odvedljiva v okolici točke a , tudi njena Taylorjeva vrsta s središčem v a konvergira v neki okolici točke a .



Če potenčna vrsta konvergira na intervalu $(-1, 1]$, je njena vsota zvezna v točki 1.



Vsak poln metrični prostor je omejen.



Če je limita funkcijskega zaporedja zveznih funkcij zvezna funkcija, je konvergenca enakomerna.



Če so delne vsote vrste z nenegativnimi členi navzgor omejene, je ta vrsta konvergentna.



Množica, ki jo tvorijo vsi členi nekega Cauchyjevga zaporedja realnih števil, je zaprta.

2. naloga

Pokaži, da je zaporedje (a_n) , ki je podano z začetnim členom $a_1 = 12$ in z rekurzivnim predpisom

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$$

konvergentno in izračunaj njegovo limito.

3. naloga

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctg x - x}{x^3} & ; x \neq 0, \\ a & ; x = 0. \end{cases}$$

a) Določi konstanto $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija f zvezna na \mathbb{R} . Nato pokaži, da je tako dobljena funkcija tudi zvezno odvedljiva na \mathbb{R} .

b) Ali je funkcija f enakomerno zvezna na \mathbb{R} ?

4. naloga

Naj bo K krivulja, ki je polarnih koordinatah podana z enačbo

$$r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}.$$

a) Skiciraj krivuljo K in določi kote, pri katerih koordinati x in y na krivulji K dosežeta svoje ekstremne vrednosti.

b) Izračunaj dolžino krivulje K .

5. naloga

Naj bo $M = C[0, 1]$ prostor zveznih funkcij na intervalu $[0, 1]$ in $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ preslikava podana s predpisom

$$F(f) = f(0) \int_0^1 f(x) dx.$$

a) Obravnavaj zveznost preslikave F v metrikah d_∞ in d_1 .

b) Naj bo $K_1 = \overline{K}_{d_1}(0, 1) \subset M$ zaprta krogla v metriki d_1 s središčem v ničelni funkciji. Ali je slika $F(K_1)$ kompaktna podmnožica množice \mathbb{R} ?