

Analiza 1

3. izpit

29. 8. 2016

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

N Funkcija $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja $f(x) = 0$, če je $x < 0$ in $f(x) = 2016$, če je $x > 0$, ni integrabilna na $[-1, 1]$.

N Obstaja tak metrični prostor M , ki vsebuje zaporedje z dvema limitama.

N Naj bo funkcija $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in odvedljiva na intervalu $(0, 4)$. Če velja $f(3) = f(2) + 1$, potem obstaja taka točka $c \in (2, 3)$, da je $f'(c) = 1$.

N Množici $(0, 1)$ in $(0, 1) \cup \mathbb{Q}$ imata isto moč.

N Obstajata različni neskončnokrat odveljivi funkciji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki imata enako Taylorjevo vrsto v točki 0.

N Če je $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija in velja $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, potem obstaja posplošeni integral $\int_0^\infty \frac{f(x)}{x} dx$.

N Če je številska vrsta absolutno konvergentna, lahko njenim členom poljubno spremenimo predznake in znova dobimo konvergentno vrsto.

N Število a je stekališče zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $|a - a_n| < \varepsilon$.

N Funkcija f je diferenciable v točki a , če obstaja taka linearna funkcija $h \mapsto L(h)$, da velja

$$f(a + h) - f(a) = L(h) + o(h)$$

in $\lim_{h \rightarrow 0} o(h) = 0$.

N Če sta x in y iracionalni števili, je produkt xy iracionalno število.

2. naloga

Dani sta množici kompleksnih števil

$$A = \{(1+i)z \mid z^4 \text{ je pozitivno realno število}\} \text{ in } B = \{z \mid |z-1| \in (1, 2]\}.$$

Skiciraj množico $C = A \cap B$ ter določi infimum in supremum množice $\{\operatorname{Re}(z) \mid z \in C\}$.

3. naloga

V krožni izsek s polmerom $R = 1$ in s središčnim kotom $\alpha < \frac{\pi}{2}$ vrtamo pravokotnik tako, da njegova osnovnica leži na polmeru krožnega izseka, eno oglišče pa na loku. Izmed vseh takšnih pravokotnikov poišči tistega, ki ima največjo ploščino.

POZOR: Vse korake natančno utemelji!

4. naloga

Izračunaj nedoločena integrala:

$$(a) \int \frac{2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 2x - 4}{x^3 - x^2 + 2} dx,$$

$$(b) \int x \arcsin \frac{1}{x} dx.$$

5. naloga

Za točke (x, y) v ravnini \mathbb{R}^2 je dan predpis

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - x_1| & ; \quad y_2 = y_1 \\ |x_2| + |y_2 - y_1| + |x_1| & ; \quad y_2 \neq y_1 \end{cases}$$

a) Dokaži, da predpis d določa metriko na množici \mathbb{R}^2 .

b) Naj bo d_2 običajna metrika na \mathbb{R}^2 in $id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ identična preslikava. Ali je preslikava $id : (\mathbb{R}^2, d) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$ zvezna?

c) Naj bo d_2 običajna metrika na \mathbb{R}^2 in $id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ identična preslikava. Ali je preslikava $id : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d)$ zvezna?