

## Rešitve 2. izpita iz Analize 1

- (1) **P** Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija. Potem velja  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(e^{-n}) = f(0)$ .
- N** Če je zaporedje  $(a_n)$  monotono padajoče in konvergira k 0, je vrsta  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergentna.
- P** Naj bo  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija. Potem je funkcija  $F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , definirana s predpisom  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , odvedljiva.
- P** Vsako konvergentno zaporedje realnih števil je navzdol omejeno.
- N** Enačba  $z^2 = i$  ima 2 različni kompleksni rešitvi  $z_1$  in  $z_2$ , za kateri je  $\overline{z_1} = z_2$ .
- P** Denimo, da potenčna vrsta  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  konvergira v točki  $x = 2$ . Potem je vrsta  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolutno konvergentna.
- N** Če je funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  enakomerno zvezna, je omejena.
- P** Obstaja odvedljiva funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ki ni zvezno odvedljiva.
- N** Če je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  odvedljiva bijektivna funkcija, je njen inverz  $f^{-1}$  odvedljiva funkcija.
- N** Naj bo  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  skrčitev. Potem ima  $f$  natanko eno negibno točko.

(2) Dana je funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

(a) Čimbolj natančno skiciraj graf funkcije  $f$ .

(b) Razvij funkcijo  $f$  v Taylorjevo vrsto okoli točke  $x = 0$ . Ali Taylorjeva vrsta konvergira k funkciji  $f$  enakomerno na  $\mathbb{R}$ ?

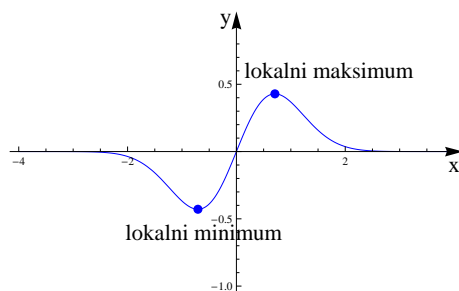
*Rešitev:* (a) Funkcija  $f$  je definirana na  $D_f = \mathbb{R}$  in ima ničlo v točki  $x = 0$ . Limiti na robovih definicijskega območja sta

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0.$$

Odvod funkcije  $f$  je enak

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

Funkcija  $f$  pada na  $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$  in narašča na  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ . V točki  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ima lokalni minimum, v točki  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  pa lokalni maksimum. Poglejmo si še graf funkcije  $f$ .



(b) Z uporabo eksponentne vrste dobimo

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

Od tod dobimo Taylorjev razvoj funkcije  $f$  okoli točke  $x = 0$

$$f(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!} = x - x^3 + \frac{x^5}{2} - \frac{x^7}{3!} + \dots$$

Funkcija  $f$  je omejena, vsi Taylorjevi polinomi pa so neomejeni na  $\mathbb{R}$ . Od tod sledi, da Taylorjeva vrsta ne konvergira enakomerno na  $\mathbb{R}$  k funkciji  $f$ .  $\square$

- [2] Definičijsko območje, ničla in limite.
- [3] Stacionarna točka in lokalna ekstrema.
- [5] Graf.
- [5] Taylorjeva vrsta.
- [5] Sklep, da konvergenca ni enakomerna.

- (3) (a) Odsek krivulje  $y = x \sin x$  za  $x \in [0, \pi]$  zavrtimo okrog abscisne osi. Izračunaj prostornino nastale vrtenine.  
 (b) Izračunaj nedoločeni integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{-x^2 - 2x}} dx.$$

*Rešitev:* (a) Prostornina dane vrtenine je enaka

$$V = \pi \int_0^\pi x^2 \sin^2 x dx.$$

Z uporabo formule za dvojne kote dobimo  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ . Ko to vstavimo v integral, dobimo

$$V = \pi \int_0^\pi x^2 \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi x^2 (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi^3}{3} - \int_0^\pi x^2 \cos 2x dx \right).$$

Integral na desni lahko izračunamo z integracijo po delih

$$\int_0^\pi x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x \sin 2x dx = - \int_0^\pi x \sin 2x dx.$$

Če še enkrat integriramo po delih, dobimo

$$- \int_0^\pi x \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Rezultat je torej

$$V = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2} \right)}}.$$

- (b) Nedoločeni integral iracionalne funkcije bomo izračunali s pomočjo nastavka

$$\int \frac{x}{\sqrt{-x^2 - 2x}} dx = A\sqrt{-x^2 - 2x} + \int \frac{B}{\sqrt{-x^2 - 2x}} dx.$$

Z odvajanjem te enakosti dobimo

$$\frac{x}{\sqrt{-x^2 - 2x}} = \frac{A(-2x - 2)}{2\sqrt{-x^2 - 2x}} + \frac{B}{\sqrt{-x^2 - 2x}} = \frac{-Ax - A + B}{\sqrt{-x^2 - 2x}}.$$

S primerjavo koeficientov vidimo, da je  $A = B = -1$ , kar nam da

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{-x^2 - 2x}} dx &= -\sqrt{-x^2 - 2x} - \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x}}, \\ &= -\sqrt{-x^2 - 2x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x+1)^2}}, \\ &= -\sqrt{-x^2 - 2x} - \arcsin(x+1) + C. \end{aligned}$$

□

- [1] Formula za prostornino vrtenine.
- [7] Uporaba formule za dvojne kote in integracija po delih.
- [2] Prostornina.
- [2] Nastavek.
- [4] Izračun koeficientov.
- [2] Integracija.
- [2] Rezultat.

(4) Na množico  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  vpeljemo metriko  $d$  s predpisom

$$d(z, w) = \text{arch} \left( 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \text{Im}(z) \text{Im}(w)} \right).$$

(a) Naj bo  $\tau : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  preslikava s predpisom  $\tau(z) = \frac{z-1}{z+1}$ . Pokaži, da  $\tau$  inducira bijekcijo  $\tau : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ , ki zadošča pogoju  $d(\tau(z), \tau(w)) = d(z, w)$ .

(b) Označimo z  $d_2$  evklidsko metriko na  $\mathbb{H}$ . Ali je preslikava  $\text{Id} : (\mathbb{H}, d_2) \rightarrow (\mathbb{H}, d)$  s predpisom  $\text{Id}(z) = z$  enakomerno zvezna?

*Rešitev:* (a) Množica  $\mathbb{H}$  z dano metriko  $d$  je eden izmed modelov hiperbolične ravnine. Pokazali bomo, da je preslikava  $\tau$  izometrija hiperbolične ravnine, ki igra podobno vlogo kot rotacije evklidske ravnine. Preverimo lahko, da preslikava  $\tau$  določa bijekcijo

$$\tau : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

z inverzom

$$\tau^{-1}(z) = \frac{z+1}{-z+1}.$$

Pokazati moramo še, da  $\tau$  preslika zgornjo polravnino  $\mathbb{H}$  nazaj nase. V ta namen vzemimo poljuben  $z = x + iy \in \mathbb{H}$ . Pokazati moramo, da je potem  $\text{Im}(\tau(z)) > 0$ . To sledi iz računa

$$\text{Im}(\tau(z)) = \frac{\tau(z) - \overline{\tau(z)}}{2i} = \frac{\frac{z-1}{z+1} - \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}}{2i} = \frac{(z-1)(\bar{z}+1) - (z+1)(\bar{z}-1)}{2i(z+1)(\bar{z}+1)} = \frac{z - \bar{z}}{i|z+1|^2} = \frac{2 \text{Im}(z)}{|z+1|^2}.$$

Ker je po predpostavki  $\text{Im}(z) > 0$ , je tudi  $\text{Im}(\tau(z)) > 0$ , kar smo želeli pokazati. Podoben sklep deluje tudi za preslikavo  $\tau^{-1}$ .

Pokažimo sedaj, da je  $\tau$  izometrija. Želimo pokazati, da za vsaka  $z, w \in \mathbb{H}$  velja

$$\text{arch} \left( 1 + \frac{|\tau(z) - \tau(w)|^2}{2 \text{Im}(\tau(z)) \text{Im}(\tau(w))} \right) = \text{arch} \left( 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \text{Im}(z) \text{Im}(w)} \right).$$

Ker je funkcija  $\text{arch}$  injektivna, je dovolj, da pokažemo enakost

$$\frac{|\tau(z) - \tau(w)|^2}{2 \text{Im}(\tau(z)) \text{Im}(\tau(w))} = \frac{|z - w|^2}{2 \text{Im}(z) \text{Im}(w)}.$$

V ta namen računajmo

$$|\tau(z) - \tau(w)|^2 = \left| \frac{z-1}{z+1} - \frac{w-1}{w+1} \right|^2 = \frac{|(z-1)(w+1) - (z+1)(w-1)|^2}{|(z+1)(w+1)|^2} = \frac{4|z-w|^2}{|z+1|^2|w+1|^2}.$$

Od tod sledi

$$\frac{|\tau(z) - \tau(w)|^2}{2 \text{Im}(\tau(z)) \text{Im}(\tau(w))} = \frac{\frac{4|z-w|^2}{|z+1|^2|w+1|^2}}{2 \frac{2 \text{Im}(z)}{|z+1|^2} \frac{2 \text{Im}(w)}{|w+1|^2}} = \frac{|z-w|^2}{2 \text{Im}(z) \text{Im}(w)},$$

kar smo želeli pokazati.

(b) Sedaj bomo pokazali, da preslikava  $\text{Id} : (\mathbb{H}, d_2) \rightarrow (\mathbb{H}, d)$  ni enakomerno zvezna. Konstruirali bomo zaporedje parov točk  $(z_n, w_n)$ , ki bodo na konstantni hiperbolični razdalji, evklidska razdalja med njimi pa bo konvergirala proti nič.

Da si olajšamo račun, izberimo  $z = it$  in  $w = is$ , kjer je  $t > s$ . Potem je

$$d(z, w) = \operatorname{arch} \left( 1 + \frac{(t-s)^2}{2ts} \right) = \operatorname{arch} \left( \frac{t^2 + s^2}{2ts} \right).$$

Če izberemo  $t = 2s$ , dobimo

$$d(z, w) = \operatorname{arch} \left( \frac{t^2 + s^2}{2ts} \right) = \operatorname{arch} \left( \frac{5s^2}{4s^2} \right) = \operatorname{arch} \left( \frac{5}{4} \right).$$

Vidimo, da je hiperbolična razdalja med točkama  $z = 2is$  in  $w = is$  konstantna in neodvisna od parametra  $s$ . Če izberemo  $z_n = 2i2^{-n}$  in  $w_n = i2^{-n}$ , je  $d(z_n, w_n) = \operatorname{arch} \left( \frac{5}{4} \right)$  in  $d_2(z_n, w_n) = 2^{-n}$ . Našli smo torej zaporedje parov točk, ki so čedalje bliže v evklidski razdalji in na konstantni hiperbolični razdalji. Od tod sledi, da preslikava  $\operatorname{Id}$  ni enakomerno zvezna.  $\square$

- [6] Dokaz, da  $\tau$  določa bijekcijo  $\tau : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ .
- [6] Dokaz, da je  $\tau$  izometrija.
- [8] Dokaz, da  $\operatorname{Id}$  ni enakomerno zvezna.

(5) Zaporedje  $(a_n)$  je dano s predpisom

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

(a) Pokaži, da je zaporedje  $(a_n)$  konvergentno za vsak  $\alpha \geq 1$ .

(b) Izračunaj limito zaporedja  $(a_n)$  v primeru, ko je  $\alpha = 1$ .

*Rešitev:* (a) Ocenimo lahko, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$\frac{n}{(2n)^\alpha} \leq a_n \leq \frac{n}{(n+1)^\alpha}.$$

Če je  $\alpha > 1$ , konvergirata leva in desna stran neenakosti proti 0, zato je tudi zaporedje  $(a_n)$  konvergentno z limito  $a = 0$ .

V primeru  $\alpha = 1$  na ta način ne moremo dokazati konvergence, vidi pa se, da je zaporedje  $(a_n)$  navzgor omejeno z 1. Pokazali bomo še, da je zaporedje  $(a_n)$  naraščajoče. Dokazati moramo, da za vsako naravno število  $n$  velja  $a_{n+1} \geq a_n$  oziroma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} &\geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, \\ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} &\geq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Če obe strani neenačbe pomnožimo z  $(n+1)(2n+1)(2n+2)$ , pridemo do:

$$\begin{aligned} (n+1)(2n+2) + (n+1)(2n+1) &\geq (2n+1)(2n+2), \\ 2n^2 + 4n + 2 + 2n^2 + 3n + 1 &\geq 4n^2 + 6n + 2, \\ n &\geq -1. \end{aligned}$$

Zadnja neenakost drži za vsako naravno število  $n$ , kar pomeni, da je zaporedje  $(a_n)$  naraščajoče. Ker je tudi navzgor omejeno, je konvergentno.

(b) Dani člen zaporedja bomo poskusili interpretirati kot Riemannovo vsoto ustrezne funkcije. Če pišemo

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}},$$

vidimo, da gre za Riemannovo vsoto funkcije  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  na intervalu  $[0, 1]$ . Torej je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2.$$

□

- [5] Utemeljitev, da je zaporedje  $(a_n)$  konvergentno za  $\alpha > 1$ .
- [5] Utemeljitev, da je zaporedje  $(a_n)$  konvergentno za  $\alpha = 1$ .
- [5] Prevedba na Riemannovo vsoto.
- [5] Izračun limite.