

REŠITVE 2. KOLOKVIJA Z DNE 20. 1. 2016

Točke pri pozameznih delih so označene z (n) .

1. $(20=10 \times 2)$

P Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergira, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pa ne konvergira absolutno, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ne konvergira absolutno.

N Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergira za vsak $s < 1$.

P Če za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$, vrsta ne konvergira absolutno.

P Če za funkcijo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ne obstaja limita $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{2^n})$, funkcija f ni zvezna.

P Če je $f : [-3, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ taka zvezna funkcija, da je $f(-3) = 1$, $f(0) = -2$ in $f(1) = 2$, potem ima f vsaj dve ničli.

P Velja $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$.

P Če velja $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, potem obstaja tako število a , da za vsak $x \geq a$ velja $f(x) \geq 2016$.

N Vsaka zvezna funkcija $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ je omejena.

P Funkcija $f(x) = x^2$ ni enakomerno zvezna na množici \mathbb{R} .

N Če ima funkcija f enaki levo in desno limito v točki a , je zvezna v a .

2. a) Ugotovi, ali vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot n!}$ konvergira?

b) Obravnavaj konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n! (\sin a) \left(\sin \frac{a}{2}\right) \cdots \left(\sin \frac{a}{n+1}\right) \left(\sin \frac{a}{n+2}\right)$$

za $a \in (0, \pi)$.

Rešitev. a) Vrsta ima pozitivne člene $a_n = \frac{n^n}{n!n!}$, zato uporabimo kvocientni kriterij in dobimo:

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)^2} = \frac{(n+1)^n}{n^n(n+1)} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (6)$$

Od tod izračunamo

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{=} 0 \cdot e = 0.$$

Ker je $D = 0 < 1$, vrsta konvergira. (4)

b) Za $a \in (0, \pi)$ velja $\sin \frac{a}{m} > 0$ za vsako število $m \in \mathbb{N}$. Ogledamo si absolutno konvergenco vrste, torej vrsto s pozitivnimi členi $b_n = |a_n| = n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdots \sin \frac{a}{n+2}$. Uporabimo kvocientni kriterij in dobimo

$$D_n = \frac{b_{n+1}}{b_n} = (n+1) \sin \frac{a}{n+3}.$$

Z 'modrim' vrivanjem dobimo

$$\begin{aligned} D &= \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n+1)}{n+3} \cdot \frac{\sin \frac{a}{n+3}}{\frac{a}{n+3}} = \\ &= a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{a}{n+3}}{\frac{a}{n+3}} = a \cdot 1 \cdot 1 = a. \quad (3) \end{aligned}$$

Od tod zaključimo:

1. Če je $a < 1$, vrsta (absolutno) konvergira. (1)
2. Če je $a > 1$, za dovolj velike n velja $D_n > 1$, torej zaporedje b_n narašča, zato ne velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ in vrsta divergira. (2)
3. Za $a = 1$ z upoštevanjem ocene $\sin x \leq x$, ki velja za $x > 0$, dobimo

$$|a_n| = b_n \leq 1 \cdot 2 \cdots n \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2},$$

od koder sledi

$$|a_n| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, po primerjalnem kriteriju sledi, da tudi naša vrsta (absolutno) konvergira. (4)

3. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right).$$

a) Določi definicijsko območje funkcije f in dokaži, da je injektivna.

b) Določi zalogo vrednosti funkcije f in izračunaj njeno inverzno funkcijo.

Rešitev. a) Ker je funkcija arctg definirana povsod, edina omejitev izhaja iz obstoja ulomka, od koder dobimo pogoj $e^x \neq e^{-x}$, ki je ekvivalenten zahtevi, da je $x \neq 0$, torej je definicijsko območje enako $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (2)

Injektivnost: Opazujmo enakost $f(a) = f(b)$, ki zaradi injektivnosti funkcije arctg preide v

$$\frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} = \frac{e^b + e^{-b}}{e^b - e^{-b}}.$$

Če odpravimo ulomke in odštejemo enake člene, dobimo zahtevo

$$2e^{a-b} = 2e^{b-a},$$

ki je izpolnjena le za $a = b$, od koder izhaja injektivnost funkcije f . (3)

b) Zalogo vrednosti dobimo tako, da pogledamo sliki podintervalov $(-\infty, 0)$ in $(0, \infty)$. Na vsakem od teh podintervalov je funkcija zvezna zato si oglejmo limiti

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2}$$

in

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot e^{-x}}{(e^x - e^{-x}) \cdot e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Od tod sklepamo, da funkcija f interval $(0, \infty)$ preslika na interval $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Ker je funkcija f liha ($f(-x) = -f(x)$), je slika intervala $(-\infty, 0)$ enaka intervalu $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$, torej je njena zaloga vrednosti enaka

$$\mathcal{Z}_f = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (9)$$

Inverzno funkcijo izračunamo iz enačbe $y = f(x)$ v obliki $x = f^{-1}(y)$. Dobimo

$$\operatorname{tg} y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

od koder dobimo kvadratno enačbo

$$t^2 = \frac{\operatorname{tg} y + 1}{\operatorname{tg} y - 1}$$

za novo spremenljivko $t = e^x$. Pozitivna rešitev $t = e^x = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} y + 1}{\operatorname{tg} y - 1}}$ nam pove, da je

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{tg} y + 1}{\operatorname{tg} y - 1}. \quad (6)$$

4. a) Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

b) Ugotovi, za katere $a > 0$ obstaja limita

$$\lim_{x \downarrow 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^a}} - \frac{1}{x} \right)$$

in jo izračunaj.

Rešitev. a) Dana limita je tipa ∞ , kjer je v osnovi funkcija $f(x) = x + \cos x$, v eksponentu pa funkcija $g(x)$. Limita se tako izraža kot e^L , kjer je

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 1)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1 + \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x(\cos x + 1)} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{\sin x(\cos x + 1)} = \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(\cos x + 1)} = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^1 = e. \quad (10)$$

b) Z novo spremenljivko $t = \frac{1}{x}$ dana limita preide v

$$\begin{aligned} L &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t^2 + t^a} - t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + t^a - t^2}{\sqrt{t^2 + t^a} + t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^a}{\sqrt{t^2 + t^a} + t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^a : t}{(\sqrt{t^2 + t^a} + t) : t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{a-1}}{\sqrt{1 + t^{a-2}} + 1}. \quad (2) \end{aligned}$$

Sedaj ločimo primere:

1. Za $a > 2$ dobimo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t^2 + t^a} - t = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{a/2} (\sqrt{t^{2-a} + 1} - t^{1-a/2}) = \infty \cdot (1 - 0) = \infty,$$

torej limita ne obstaja. (2)

2. Za $1 < a \leq 2$ gre števec t^{a-1} proti ∞ , imenovalec $\sqrt{1 + t^{a-2}} + 1$ pa proti enemu od števil 2 (če je $a < 2$) ali $\sqrt{2} + 1$ (če je $a = 2$). V obeh primerih je $L = \infty$, oz. limita ne obstaja. (2)

3. Za $a = 1$, dobimo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + t^{-1}} + 1} = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

4. Za $a < 1$ dobimo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{a-1}}{\sqrt{1 + t^{a-2}} + 1} = \frac{0}{2} = 0. \quad (2)$$

5. Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ nek interval in $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Za $x \in I$ označimo s $T_x(x, f(x))$ točko na grafu funkcije f in definirajmo, da je f *konveksna funkcija*, če za vsako tako trojico $x, y, z \in I$, da je $x < y < z$, točka T_y leži pod ali na daljici med točkama T_x in T_z .

a) Dokaži, da je konveksna funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, če je I odprt interval. NAMIG. Dokaži, da za izbrane $c < a < b$ in poljuben $x \in (a, b)$ velja

$$\frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ter od tod izračunaj desno limito $\lim_{x \downarrow a} f(x)$.

b) Konstruiraj nezvezno konveksno funkcijo f v primeru $I = [0, 1)$.

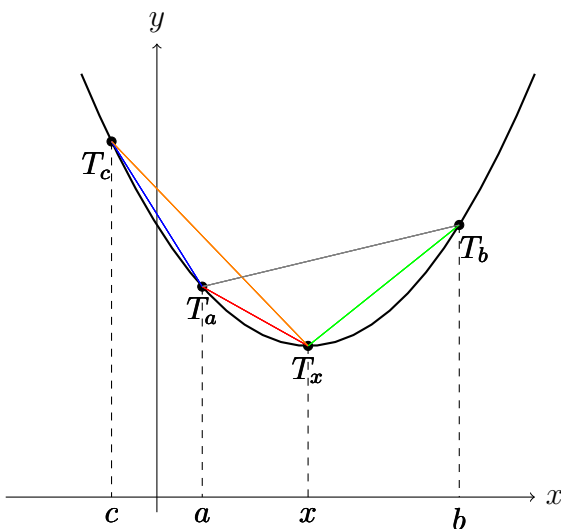
Rešitev. a) Izberimo točke $c < a < x < b$ na intervalu I . Ker točka T_a leži pod tetivo $T_c T_x$ (glej sliko), je smerni koeficient tetive $T_c T_a$ manjši od smernega koeficienta tetive $T_a T_x$, od koder dobimo

$$\frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Na enak način iz trojice točk $a < x < b$ dobimo še drugi del neenakosti

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

saj tetiva $T_a T_x$ leži pod tetivo $T_a T_b$. (7)



SMERNI KOEFICIENTI TETIV NARAŠČAJO

Zvezo

$$m = \frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = M$$

pomnožimo z $(x - a)$ in dobimo

$$m(x - a) \leq f(x) - f(a) \leq M(x - a),$$

kjer sta m in M neki konstanti. Če se x z desne približuje a , je $\lim_{x \downarrow 0} m(x - a) = \lim_{x \downarrow 0} M(x - a) = 0$, od koder sklepamo, da je $\lim_{x \downarrow 0} (f(x) - f(a)) = 0$, oziroma

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = f(a). \quad (5)$$

Z izbiro točk $c < x < a < b$ bi na enak način izpeljali še neenakost

$$\frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leq \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

od koder bi sklepali, da je tudi desna limita

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = f(a),$$

od koder sledi, da je funkcija f zvezna v a . (3)

b) Na intervalu $I = [0, 1)$ lahko definiramo funkcijo f s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x = 0 \\ 0 & ; \quad x > 0 \end{cases},$$

ki je nezvezna konveksna funkcija. (5)