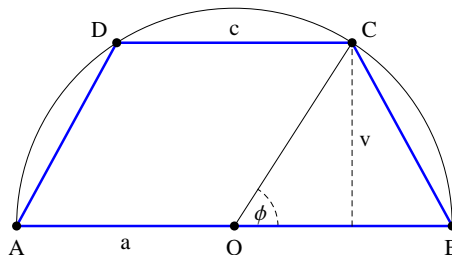


Rešitve 3. kolokvija iz Analize 1

- (1) **N** Naj bo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, za katero je $f'(x) = \frac{1}{x}$. Potem obstaja realno število C , da za vsak $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ velja $f(x) = \ln |x| + C$.
- P** Če odvedljiva funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ doseže globalni minimum v točki $x = 0$, je $f'(0) = 0$.
- N** Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strogo naraščajoča povsod odvedljiva funkcija. Potem funkcija f nima stacionarnih točk.
- N** Naj bo $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija, za katero je $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Potem obstajajo različna števila $x, y, z \in [0, 2]$, da je $f'(x) = f'(y) = f'(z) = 0$.
- P** Obstaja odvedljiva funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki ni zvezno odvedljiva.
- N** Če je $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, je integral $\int_0^2 f(x)dx$ enak ploščini med abscisno osjo in grafom funkcije f .
- P** Vsaka zvezna funkcija $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ima primitivno funkcijo.
- N** Naj bo $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ omejena zvezna funkcija. Potem je funkcija f na intervalu $(0, \infty)$ enakomerno zvezna.
- P** Če za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f''(x) > 0$, potem graf funkcije f leži nad premico z enačbo $y = f'(0)x + f(0) - 1$.
- P** Če je funkcija f odvedljiva v točki a , obstaja limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

- (2) V krožnico včrtamo trapez tako, da njegova osnovnica sovpada s premerom krožnice. Določi obliko trapeza tako, da bo njegova ploščina čim večja in natančno utemelji, zakaj je dobljena rešitev res prava!

Rešitev: Označimo z A, B, C in D oglišča trapeza, O središče krožnice ter s ϕ kot med daljicama OB in OC . Privzemimo še, da je polmer krožnice enak R in označimo $a = |AB|$, $c = |CD|$ ter z v višino trapeza.



Z uporabo trigonometrije dobimo, da je $a = 2R$, $c = 2R \cos \phi$ in $v = R \sin \phi$. Ploščina trapeza je tako enaka

$$S(\phi) = v \cdot \frac{a + c}{2} = R^2 \sin \phi (1 + \cos \phi).$$

Sedaj je naša naloga, da poiščemo maksimum funkcije S na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Pri kotih $\phi = 0$ dobimo daljico, pri $\phi = \frac{\pi}{2}$ pa trikotnik, zato v resnici iščemo maksimum S na $(0, \frac{\pi}{2})$. Odvod funkcije S je

$$S'(\phi) = R^2(\cos \phi + \cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = R^2(2 \cos^2 \phi + \cos \phi - 1).$$

Stacionarne točke so rešitve enačbe

$$2 \cos^2 \phi + \cos \phi - 1 = 0.$$

To je kvadratna enačba za $\cos \phi$, ki ima rešitvi $\cos \phi = -1$ in $\cos \phi = \frac{1}{2}$. Na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ imamo torej eno stacionarno točko $\phi = \frac{\pi}{3}$. Kandidati za ekstreme funkcije S so koti $\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$. Ker je $S(0) = 0$, $S(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ in $S(\frac{\pi}{2}) = R^2$, sklepamo, da ima S maksimum v točki $\phi = \frac{\pi}{3}$. \square

- [2] Skica.
- [3] Izbira parametra ϕ .
- [5] Izražava ploščine s parametrom ϕ .
- [1] Določitev definicijskega območja funkcije S .
- [5] Izračun odvoda in stacionarne točke S .
- [4] Dokaz, da ima S maksimum v točki $\phi = \frac{\pi}{3}$.

(3) Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom

$$f(x) = x + \arctg \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

- (a) Določi definicijsko območje ter limite in tangente na robu definicijskega območja funkcije f . Nato poišči še stacionarne točke in skiciraj graf funkcije f .
 (b) Pokaži, da je funkcija f enakomerno zvezna na intervalu $(1, \infty)$.

Rešitev: (a) Funkcija f je definirana na $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, limite na robu definicijskega območja pa so:

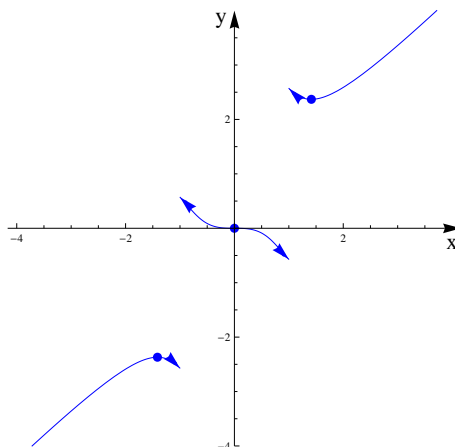
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \arctg \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) \right) &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \arctg \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) \right) = \infty, \\ \lim_{x \uparrow -1} \left(x + \arctg \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) \right) &= -1 - \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \downarrow -1} \left(x + \arctg \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) \right) = -1 + \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \uparrow 1} \left(x + \arctg \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) \right) &= 1 - \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \downarrow 1} \left(x + \arctg \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) \right) = 1 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 2)}{x^4 - x^2 + 1}.$$

Od tod sklepamo, da funkcija f narašča na intervalih $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ ter pada na intervalih $(-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2})$. Stacionarne točke so $x = \pm\sqrt{2}$ ter $x = 0$. V $x = -\sqrt{2}$ ima f lokalni maksimum, v $x = \sqrt{2}$ pa lokalni minimum.

Leve in desne tangente f v točkah $x = \pm 1$ imajo vse koeficient $k = -1$. Poglejmo sedaj graf funkcije f .



(b) Za dokaz enakomerne zveznosti je dovolj pokazati, da je odvod funkcije f omejen na intervalu $(1, \infty)$. To lahko dokažemo z reševanjem neenačb, bolj elegantno pa je opaziti, da je:

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow 1} \frac{x^2(x^2 - 2)}{x^4 - x^2 + 1} &= -1, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x^2 - 2)}{x^4 - x^2 + 1} &= 1. \end{aligned}$$

Zvezna funkcija na odprtem intervalu, ki ima limiti v krajiščih, pa je omejena. \square

- [4] Definijsko območje in izračun limit.
- [6] Izračun odvoda funkcije f , stacionarnih točk in tangent na robu območja.
- [5] Skica grafa funkcije f .
- [2] Opazka, da je dovolj pokazati omejenost odvoda.
- [3] Dokaz omejenosti odvoda.

(4) Izračunaj nedoločena integrala:

(a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx,$

(b) $\int x^5 \operatorname{arctg}(x^2) dx.$

Rešitev:

(a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx :$

Če uvedemo novo spremenljivko $x = \sin t$, bo $dx = \cos t dt$ in tako dobimo

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \int \sin^2 t dt.$$

Ta integral lahko sedaj izračunamo z uporabo formul za dvojne kote

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \sin^2 t dt = \int \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C, \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin x) + C.}} \end{aligned}$$

(b) $\int x^5 \operatorname{arctg}(x^2) dx :$

Najprej integrirajmo po delih z izbiro $u = \arctg(x^2)$ in $dv = x^5 dx$. Potem je $du = \frac{2x}{1+x^4} dx$, $v = \frac{x^6}{6}$ in

$$\int x^5 \operatorname{arctg}(x^2) dx = \frac{x^6}{6} \arctg(x^2) - \frac{1}{3} \int \frac{x^7}{1+x^4} dx.$$

Integral na desni lahko izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t = 1 + x^4$, da dobimo

$$\int \frac{x^7}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{t-1}{t} dt = \frac{1}{4}(t - \ln|t|) + C = \frac{1}{4}(1+x^4 - \ln|1+x^4|) + C.$$

Rezultat je torej

$$\int x^5 \operatorname{arctg}(x^2) dx = \underline{\underline{\frac{x^6}{6} \arctg(x^2) - \frac{1}{12}(1+x^4) + \frac{1}{12} \ln|1+x^4| + C.}}$$

□

- [5] Uvedba nove spremenljivke $x = \sin t$.
- [3] Uporaba formule za dvojne kote.
- [2] Rezultat.
- [5] Integracija po delih.
- [3] Uvedba nove spremenljivke.
- [2] Rezultat.

(5) Naj bo $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija, ki ni nujno zvezno odvedljiva. Predpostavimo še, da je f' naraščajoča funkcija.

- (a) Izberimo poljubni števili $x, y \in (a, b)$, za kateri velja $x < y$. Pokaži, da za poljuben $\mu \in (f'(x), f'(y))$ potem obstaja takšno število $c \in (x, y)$, da je $f'(c) = \mu$.
- (b) Naj bodo x_1, x_2, y_1, y_2 poljubna števila z intervala (a, b) , za katere velja $x_1 < y_1$ in $x_2 < y_2$. Pokaži, da potem obstaja $c \in (a, b)$, da velja

$$f(y_1) + f(y_2) - f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(y_1 + y_2 - x_1 - x_2).$$

Rešitev: (a) Definirajmo funkcijo $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$g(t) = f(t) - \mu t.$$

Funkcija g je potem na intervalu (a, b) odvedljiva in velja:

$$g'(x) = f'(x) - \mu < 0,$$

$$g'(y) = f'(y) - \mu > 0.$$

V okolici točke x torej funkcija g pada, v okolici y pa g narašča. Zaradi zveznosti mora imeti g na intervalu (x, y) vsaj en lokalni minimum v točki $c \in (x, y)$. Zaradi odvedljivosti pa potem velja $g'(c) = 0$ oziroma

$$f'(c) = \mu.$$

(b) Z uporabo Lagrangeevega izreka za funkcijo f na intervalih $[x_1, y_1]$ in $[x_2, y_2]$ lahko najdemo točki $c_1 \in (x_1, y_1)$ ter $c_2 \in (x_2, y_2)$, da velja:

$$f(y_1) - f(x_1) = f'(c_1)(y_1 - x_1),$$

$$f(y_2) - f(x_2) = f'(c_2)(y_2 - x_2).$$

Če označimo $d_1 = y_1 - x_1$ in $d_2 = y_2 - x_2$ ter uporabimo zgornji enakosti, lahko pogoj

$$f(y_1) + f(y_2) - f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(y_1 + y_2 - x_1 - x_2)$$

prepišemo v

$$f'(c_1)d_1 + f'(c_2)d_2 = f'(c)(d_1 + d_2)$$

oziroma

$$f'(c_1)\frac{d_1}{d_1 + d_2} + f'(c_2)\frac{d_2}{d_1 + d_2} = f'(c).$$

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $f'(c_1) < f'(c_2)$ in nato ocenimo

$$f'(c_1) < f'(c_1)\frac{d_1}{d_1 + d_2} + f'(c_2)\frac{d_2}{d_1 + d_2} < f'(c_2).$$

Če pišemo $\mu = f'(c_1)\frac{d_1}{d_1 + d_2} + f'(c_2)\frac{d_2}{d_1 + d_2}$ in uporabimo (a) del naloge na intervalu (c_1, c_2) , dobimo iskani $c \in (c_1, c_2) \subset (a, b)$, za katerega je $f'(c) = \mu$. \square

· [5] Izbira funkcije g .

· [3] Dokaz, da ima g minimum.

· [2] Obstoj števila c , ki ustreza pogojem.

· [4] Uporaba Lagrangeevega izreka.

· [4] Preoblikovanje enakosti v $f'(c_1)\frac{d_1}{d_1 + d_2} + f'(c_2)\frac{d_2}{d_1 + d_2} = f'(c)$.

· [2] Uporaba (a) dela za dokaz obstoja točke c .