

Analiza 1

4. kolokvij

2. 6. 2016

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Σ

--

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

P Limita funkcijskega zaporedja zveznih funkcij, ki enakomerno konvergira, je zvezna funkcija.

N Vsaka neskončnokrat odvedljiva funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je enaka vsoti svoje Taylorjeve vrste s središčem v 0.

N Obstaja kompaktna odprta podmnožica intervala $[0, 1]$.

P Če je $f(x)$ vsota potenčne vrste, ki konvergira na intervalu $(-1, 1)$, je funkcija f odvedljiva na intervalu $(-1, 1)$.

P V vsakem metričnem prostoru obstaja podmnožica, ki je hkrati odprta in zaprta.

N Potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergira k funkciji $f(x) = e^x$ enakomerno na \mathbb{R} .

N Za vsak $x \in [-1, 1]$ velja $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

P Obstajata različni neskončnokrat odvedljivi funkciji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki imata enako Taylorjevo vrsto s središčem v 1.

N Če zaporedje zveznih funkcij $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ po točkah na $[0, 1]$ konvergira k funkciji $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

P Obstaja metrični prostor M z neskončno točkami, za katerega velja $d(x, y) = 1$ za vsaka različna $x, y \in M$.

4. kolokvij iz Analize 1

2. 6. 2016

Veliko uspeha!

Ime in priimek

1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

Sedež (2.01)

Vpisna številka

2. naloga (20 točk)

a) Izračunaj dolžino krivulje, ki je podana v parametrični obliki s predpisom

$$\vec{r}(t) = (1 - 3t^2, 3t - t^3).$$

za $t \in [-2, 2]$.

b) Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če krožni odsek

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq \frac{1}{2}\}$$

zavrtimo okoli osi $x = \frac{1}{2}$.

$$a) \quad \mathcal{L} = \int_{-2}^2 |\dot{\vec{r}}(t)| dt$$

$$\dot{\vec{r}} = (-6t, 3 - 3t^2) \Rightarrow$$

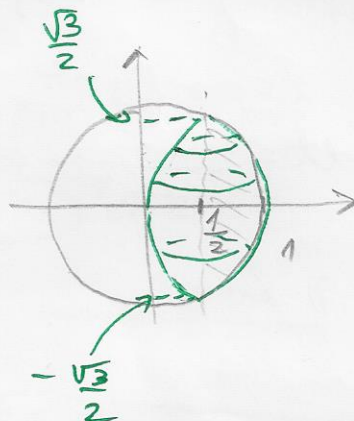
$$\Rightarrow |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{36t^2 + 9 - 18t^2 + 9t^4} = \sqrt{9t^4 + 18t^2 + 9} = 3(t^2 + 1)$$

$$\mathcal{L} = 3 \int_{-2}^2 (t^2 + 1) dt = 6 \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_0^2 =$$

$$= 6 \left(\frac{8}{3} + 2 \right) = \underline{\underline{28}}$$

10

b)



2. naloga

$$dV = \pi \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dy, \quad x = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dV = \pi \left(\sqrt{1-y^2} - \frac{1}{2}\right)^2 dy = \pi \left(1 - y^2 - \sqrt{1-y^2} + \frac{1}{4}\right) dy$$

Presečišči $x^2 + y^2 = 1$ in $x = \frac{1}{2}$: $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{5}{4} - y^2 - \sqrt{1-y^2}\right) dy$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-y^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos t \cdot \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2t + 1) dt =$$

$$\begin{aligned} y &= \sin t \\ dy &= \cos t dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6}$$

$$V = 2\pi \left(\left[\frac{5}{4}y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} \right) = 2\pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{24} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{(15-3-3)\sqrt{3}}{24} - \frac{4\pi}{24} \right) = \frac{\pi(9\sqrt{3}-4\pi)}{12} = \frac{3\sqrt{3}\pi}{4} - \frac{\pi^2}{3}$$

10

3. naloga

$$a) f(x) = \frac{\arctg x^2 \ln(1+x^{a+1})}{x^{a+b}(1+x^b)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \stackrel{(1)}{=} 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \stackrel{(2)}{=} 0$$

Singularnosti: $x=0$, $x=\infty$

$x=0$: ① $a+1 > 0 \Leftrightarrow a > -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^{a+1})}{x^{a+1}} \stackrel{(1)}{=} 1$$

$$f(x) = \frac{\arctg x^2 \cdot x \ln(1+x^{a+1})}{x^{a+1}(1+x^b)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

\Rightarrow I obstaja pri 0 za $a > -1$

② $a = -1$: $f(x) = \frac{x \arctg x^2 \ln 2}{1+x^b} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

\Rightarrow I obstaja pri 0 za $a = -1$

③ $a < -1 \Rightarrow x^{a+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{\arctg x^2 \cdot x \ln(1+x^{a+1})}{x^{a+1}(1+x^b)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

\Rightarrow I obstaja pri 0 za $a < -1$

I obstaja pri 0 za $\forall a \in \mathbb{R}$

$x=\infty$

$$f(x) = \frac{\arctg x^2 \ln(1+x^{a+1})}{x^{a+b}(1+x^{-b})} \xrightarrow{\frac{\pi}{2}}, \text{ zato}$$

lahko gledamo le $g(x) = \frac{\ln(1+x^{a+1})}{x^{a+b}}$

① $a+b > 1 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : a+b-\varepsilon > 1$

$$g(x) = \frac{\ln(1+x^{a+1})}{x^\varepsilon x^{a+b-\varepsilon}} \xrightarrow{0} 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow I obstaja pri ∞

(2) $a+b \leq 1$

(2.1) $a+1 \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1+x^{a+1}) \neq 0$

$x = a+b \leq 1 \Rightarrow$ I ne obstaja,

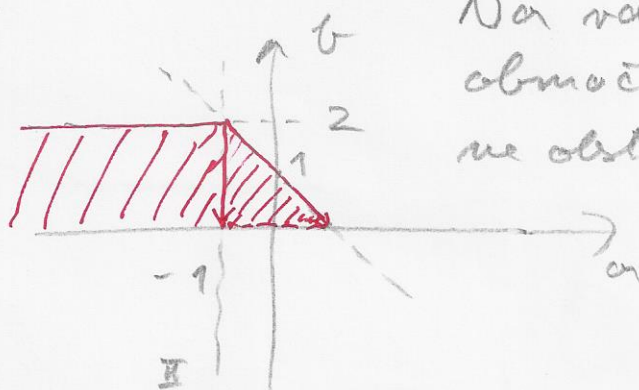
če $a \geq -1$ in $b \leq 1-a$

(2.2) $a+1 < 0 \Rightarrow x^{a+1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^{a+1})}{x^{a+1}} \stackrel{(1)}{=} 1$

$g(x) = \frac{x \ln(1+x^{a+1})}{x^{a+1} \cdot x^b (1+x^{-b})} \rightarrow 1$, $x = b-1$

I ne obstaja, če $b-1 \leq 1 \Leftrightarrow \underline{b \leq 2}$
in $a < -1$



Na rdečem
območju I
ne obstaja!

b) (5) $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x^2 \ln x}{x^{-1}(1+x^4)} dx = \frac{\ln 2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = \frac{t^2}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2 \ln 2}{16}$

$t = \arctan x^2$
 $dt = \frac{2x dx}{1+x^4}$

4. naloga (20 točk)

a) Za realno število α razvij funkcijo

$$f(x) = (x - x^3)(1 + x^2)^\alpha$$

v Taylorjevo vrsto okoli 0.

b) Ugotovi, za katera realna števila α obstaja limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - x^3)(1 + x^2)^\alpha - \sin x}{x^3(\cos x - 1)}$$

in jo izračunaj.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= (x - x^3) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{2k+3} = \\ &= x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{k} - \binom{\alpha}{k-1} \right] x^{2k+1} \end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - x^3)(1 + x^2)^\alpha - \sin x}{x^3(\cos x - 1)} &= \\ &= \frac{(x - x^3)(1 + \alpha x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^4 + \dots) - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}}{x^3(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots) - 1} = \\ &= \frac{(x - x^3(1 - \alpha) + x^5(-\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}) - \dots) - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots)}{-x^5(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots)} \end{aligned}$$

V števcu morajo odpasti členi do $x^5 \Rightarrow 1 - \alpha = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{5}{6}}$ (6)

4. naloga

Za $a = \frac{5}{6}$ dobitimo limito

$$\frac{\left(-\frac{5}{6} + \binom{\frac{5}{6}}{2} - \frac{1}{5!}\right)}{-\frac{1}{2!}} = \frac{-\frac{5}{6} + \frac{\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)}{2} - \frac{1}{120}}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{5}{3} + \frac{5}{36} + \frac{1}{60}}{1} = \frac{600 + 50 + 6}{360} = \frac{656}{360} \quad (4)$$

5. naloga (20 točk)

a) Izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

b) Naj bo $f_n : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zaporedje zveznih funkcij, za katere je $\int_1^\infty f_n(x) dx = 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Denimo, da zaporedje f_n na intervalu $[1, \infty)$ enakomerno konvergira k funkciji f . Ali potem velja

$$\int_1^\infty f(x) dx = 1?$$

Odgovore dobro utemelji!

$$a) \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_1^{1+\frac{1}{n}} n \cdot t^n dt =$$

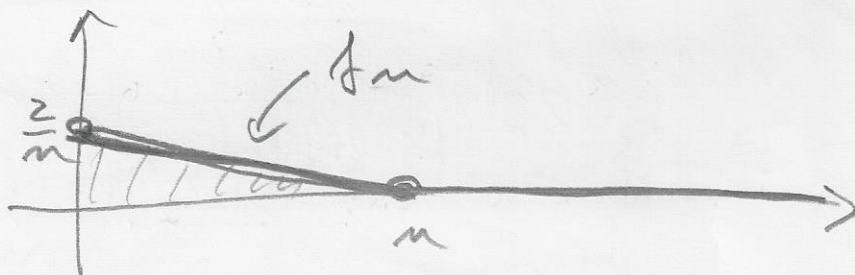
$$t = \frac{x}{n} + 1$$

$$dx = n dt$$

$$= n \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_1^{1+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1 \right] =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{\underline{e - 1}} \quad (10)$$

b) Ne!



$$\int_0^\infty f_n(x) dx = 1 \quad f_n \text{ enakomerno}$$

konvergira proti $f \equiv 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(x) dx = 0 \neq 1 \quad (10)$$