

Rešitve 1. kolokvija iz Analize 1

- (1) P Naj bo $A \subset \mathbb{R}$ taka neprazna podmnožica, da za vsak njen element $a \in A$ velja $a \leq \pi$. Potem ima množica A natančno zgornjo mejo.
- P Če členi zaporedja (a_n) zadoščajo zahtevi $2 \leq a_n \leq n$ za vsak indeks $n \geq 2015$, potem velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.
- P Obstajata pozitivni iracionalni števili x in y , da je število x^y racionalno.
- P Množica $M = \{\frac{q}{2015} \mid q \in \mathbb{Q}\}$ je povsod gosta podmnožica realnih števil.
- N Vsaka navzdol omejena množica vsebuje najmanjši element.
- N Zaporedje (a_n) je Cauchyjevo, če za vsak $\epsilon > 0$ obstajata različni naravni števili m in n , da je $|a_m - a_n| < \epsilon$.
- N Vsako omejeno zaporedje realnih števil je konvergentno.
- P Limita zaporedja (a_n) s pozitivnimi členi ne more biti negativno število $a < 0$.
- P Enačba $z^{2015} = z^2$ ima 2014 različnih kompleksnih rešitev.
- P Množici \mathbb{R} in $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ sta ekvipolentni.

(2) Poišči vsa realna števila x , ki zadoščajo neenačbi

$$\frac{|x+4|}{x+1} < \sqrt{x+2}.$$

Rešitev: Neenačba je definirana za

$$x \in [-2, -1) \cup (-1, \infty).$$

Če je $x \in [-2, -1)$, je leva stran negativna, desna pa večja ali enaka nič. Od tod sklepamo, da vsak $x \in [-2, -1)$ reši neenačbo.

Denimo sedaj, da je $x \in (-1, \infty)$. Potem velja $|x+4| = x+4$ in $x+1 > 0$. Ko odpravimo ulomek in neenačbo kvadriramo, tako dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{|x+4|}{x+1} &< \sqrt{x+2}, \\ x+4 &< (x+1)\sqrt{x+2}, \\ x^2 + 8x + 16 &< (x+1)^2(x+2), \\ x^2 + 8x + 16 &< x^3 + 4x^2 + 5x + 2, \\ 0 &< x^3 + 3x^2 - 3x - 14.\end{aligned}$$

Polinom na desni ima eno realno ničlo $x = 2$. Z uporabo Hornerjevega algoritma lahko nato pridemo do razcepa

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = (x-2)(x^2 + 5x + 7).$$

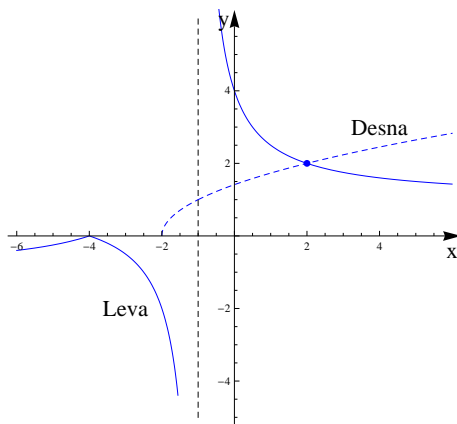
Kvadratni faktor nima realnih ničel in je za vse $x \in \mathbb{R}$ pozitiven. Od tod sklepamo, da bo neenačba

$$0 < (x-2)(x^2 + 5x + 7)$$

izpolnjena za $x > 2$. Rešitev neenačbe iz naloge pa je potem

$$R = [-2, 1) \cup (2, \infty).$$

Poglejmo še skico.



□

- [3] Definijsko območje neenačbe.
- [3] Ugotovitev, da $x \in [-2, -1)$ rešijo neenačbo.
- [5] Prevedba na kubično neenačbo.
- [5] Rešitev kubične neenačbe.
- [4] Rešitev neenačbe.

(3) (a) Pokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja enakost

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ korenov}} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right).$$

(b) Poišči vse pare kompleksnih števil $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, ki zadoščajo sistemu enačb

$$z\bar{w} = i, \quad \frac{z^2}{\bar{w}^2} = 1.$$

Rešitve zapiši v obliki: $(z_k, w_k) = (x_k + iy_k, a_k + ib_k)$.

Rešitev: (a) Enakost

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ korenov}} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right).$$

bomo dokazali z uporabo indukcije. Pri $n = 1$ imamo enakost

$$\sqrt{2} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2^2} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Denimo sedaj, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ korenov}} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right).$$

Z uporabo induksijske predpostavke od tod sledi, da je

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{(n+1) \text{ korenov}} = \sqrt{2 + 2 \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right)} = \sqrt{2 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right) \right)}.$$

Z uporabo formul za dvojne kote lahko sedaj izpeljemo:

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right) \right)} &= \sqrt{2 \left(\cos^2 \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \right) \right)}, \\ &= \sqrt{4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \right)}, \\ &= 2 \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \right). \end{aligned}$$

V zadnjem koraku smo upoštevali, da kot leži na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, zato moramo vzeti pred kosinusom predznak plus.

(b) Sedaj rešujemo sistem enačb

$$z\bar{w} = i, \quad \frac{z^2}{\bar{w}^2} = 1.$$

Iz prve enačbe lahko izrazimo $\bar{w} = \frac{i}{z}$. Ko to vstavimo v drugo enačbo, pridemo do enačbe

$$z^4 = -1.$$

Pišimo $z = |z|e^{i\phi}$. Sledi

$$|z|^4 e^{i4\phi} = 1 \cdot e^{i(\pi+2k\pi)}.$$

Vidimo, da je $|z| = 1$ in $\phi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ za $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Eksplicitno so to števila:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Ker je $|z| = 1$, je $\bar{w} = \frac{i}{z} = i\bar{z}$ in $w = -iz$. Tako dobimo:

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ w_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ w_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ w_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

□

- [2] Formula za $n = 1$.
- [3] Uporaba induksijske predpostavke.
- [3] Uporaba formule za dvojne kote.
- [2] Dokaz formule za poljubno naravno število.
- [4] Izpeljava enačbe $z^4 = -1$.
- [4] Rešitev enačbe $z^4 = -1$.
- [2] Rešitev sistema enačb.

(4) Dano je realno zaporedje (a_n) z začetnim členom $a_1 = \frac{2015}{2016}$ in rekurzivno zvezo

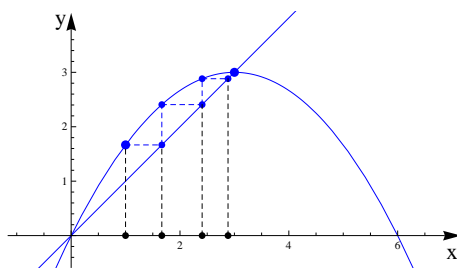
$$a_{n+1} = -\frac{a_n^2}{3} + 2a_n.$$

Dokaži, da je zaporedje konvergentno in določi njegovo limito.

Rešitev: Če je zaporedje (a_n) konvergentno, mora limitirati k številu a , ki reši enačbo:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{a^2}{3} + 2a, \\ a^2 - 3a &= 0, \\ a(a - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Možni sta torej limiti $a = 0$ in $a = 3$. Da bi ugotovili, katera limita je prava, si pogledjmo diagram.



Z grafa sklepamo, da bo pri začetni vrednosti $a_1 = \frac{2015}{2016}$ zaporedje naraščajoče in omejeno na intervalu $(0, 3)$.

Dokažimo najprej, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \in [0, 3]$.

$a_n \leq 3$:

Funkcija $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x$ je kvadratna funkcija, ki ima maksimum enak 3 pri $x = 3$. Od tod takoj sledi, da so vsi členi zaporedja manjši ali enaki 3.

$a_n \geq 0$:

Po predpostavki je $a_1 = \frac{2015}{2016} > 0$, zato denimo, da za nek n velja $a_n \geq 0$. Potem je:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> 0, \\ -\frac{a_n^2}{3} + 2a_n &> 0, \\ -a_n^2 + 6a_n &> 0, \\ a_n(6 - a_n) &> 0. \end{aligned}$$

Po indukcijski predpostavki je $a_n \geq 0$, dokazali pa smo že, da je $a_n \leq 3$. Za $a_n \in [0, 3]$ pa zgornja neenakost velja, kar pomeni, da je tudi $a_{n+1} > 0$.

Dokazali smo torej, da je zaporedje (a_n) omejeno, pokazati pa moramo še, da je naraščajoče. To sledi iz neenakosti:

$$\begin{aligned}a_{n+1} &\geq a_n, \\ -\frac{a_n^2}{3} + 2a_n &\geq a_n, \\ -a_n^2 + 3a_n &\geq 0, \\ a_n(3 - a_n) &\geq 0.\end{aligned}$$

Zadnja neenakost drži za $a_n \in [0, 3]$, kar pa vemo, da je res v našem primeru.

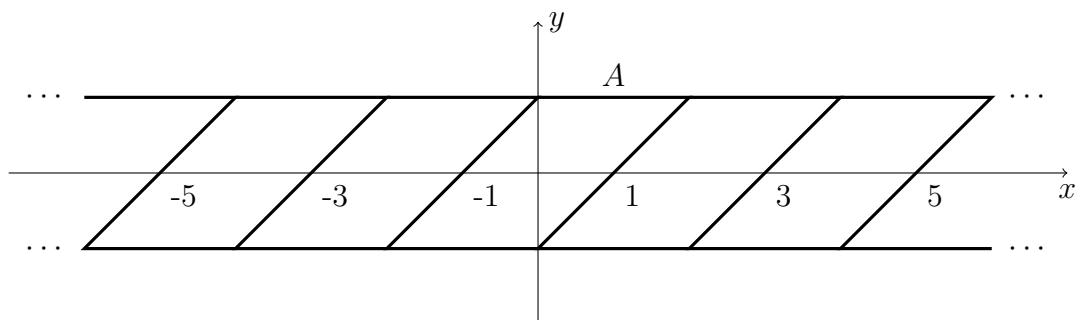
Zaporedje (a_n) je torej naraščajoče in omejeno, od koder pa sledi, da je konvergentno. Ker so vsi členi zaporedja večji ali enaki $a_1 = \frac{2015}{2016}$, limita ne more biti 0, zato je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 3.$$

□

- [4] Izračun možnih limit.
- [4] Diagram.
- [2] Opazka, da je zaporedje naraščajoče in omejeno.
- [4] Po dve točki za dokaz omejenosti zaporedja navzdol in navzgor.
- [4] Dokaz monotonosti.
- [2] Dokaz, da je zaporedje konvergentno in izračun limite.

(5) Na sliki je odebeljeno skicirana množica $A \subset \mathbb{R}^2$.



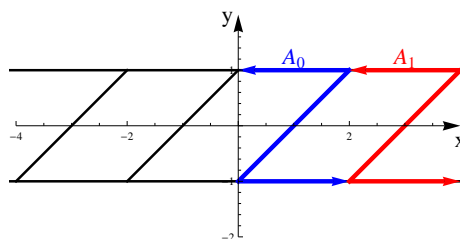
Konstruiraj bijektivno preslikavo $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

NAMIG: Najprej konstruiraj bijekcijo iz A v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Rešitev: Najprej bomo konstruirali bijekcijo $g : A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. V ta namen bomo napisali množico A v obliki neskončne unije

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k,$$

kjer je vsaka množica A_k sestavljena iz dveh vodoravnih črt in ene poševne, ki ju povezuje.



Eksplisitno je

$$A_k = ((2k, 2k+2) \times \{1\}) \cup ((2k, 2k+2) \times \{-1\}) \cup \{(x, x-2k-1) \mid x \in [2k, 2k+2]\}.$$

Preslikavo $g : A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ bomo sedaj konstruirali tako, da bo množico A_k preslikala bijektivno na interval $(k, k+1)$. In sicer se bo zgornja črta preslikala na prvo tretjino tega intervala, poševna črta na drugo tretjino, spodnja črta pa na zadnjo tretjino. Na množici A_k je preslikava g tako definirana s predpisi:

$$\begin{aligned} f(x, 1) &= k + \frac{x-2k}{6}, \\ f(x, x-2k-1) &= k + \frac{1}{3} + \frac{x-2k}{6}, \\ f(x, -1) &= k + \frac{2}{3} + \frac{x-2k}{6}. \end{aligned}$$

V drugem koraku bomo sedaj konstruirali bijekcijo $h : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Ideja je, da iz obeh množic izrežemo dve števni množici, katerih komplementa bosta enaka. Nato bo h točke iz komplementov pustila pri miru, med obema izrezanimi množicama pa bomo konstruirali bijekcijo. En način je na primer, da iz \mathbb{R} izrežemo vse večkratnike števila $\frac{1}{2}$, iz $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ pa vse lihe večkratnike števila $\frac{1}{2}$. Med tema množicama ni težko najti bijekcije. Tako dobimo predpis

$$h(x) = \begin{cases} x & ; x \neq \frac{2k+1}{2} \text{ za nek } k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4} & ; x = \frac{2k+1}{2} \text{ za nek } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Iskana bijekcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je sedaj definirana kot kompozitum $f = h \circ g$. □

- [5] Opis bijekcije $g : A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- [9] Predpis za bijekciju $g : A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- [6] Predpis za bijekciju $h : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$.