

III. Sistemi linearnih enačb

3.1 Oznake in osnovne definicije

Sistem n linearnih enačb z n neznankami

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

zapišemo v obliki

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \ (\mathbb{C}^{n \times n}), \quad x, b \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n),$$

kjer je A realna (kompleksna) matrika, x, b pa realna (kompleksna) vektorja. Pri tem (i, j) -ti element matrike A označimo z a_{ij} , x_i pa je i -ti element vektorja x .

Zapis matrik in vektorjev

Vektor x pišemo kot

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T.$$

Matriko A zapišemo po elementih, stolpcih ali vrsticah v obliki

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_1 \ \cdots \ a_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix},$$

kjer so $a_i, \alpha_i \in \mathbb{C}^n$.

$e_i \in \mathbb{R}^n$ je enotski vektor, za katerega velja $e_{ij} = \delta_{ij}$, dobimo pa:

- Ae_k je k -ti stolpec A ,
- $e_i^T A$ je i -ta vrstica A ,
- $e_i^T Ae_k$ je (i, k) -ti element A .

A^T pomeni transponirano matriko A , A^H pa je $\overline{A^T}$.

Produkti matrik in vektorjev

Skalarni produkt vektorjev x in y zapišemo v obliki

- x, y realna: $y^T x = \sum_{i=1}^n x_i y_i$,
- x, y kompleksna: $y^H x = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$.

Množenje vektorja z matriko $y = Ax$ si lahko predstavljamo na dva načina:

- $y_i = \alpha_i^T x$: i -ti element y je produkt i -te vrstice A in vektorja x ,
- $y = \sum_{i=1}^n x_i a_i$: y je linearna kombinacija stolpcev matrike A .

Podobno si lahko množenje matrik $C = AB$ predstavljamo na tri načine:

- $c_{ij} = \alpha_i^T b_j$: c_{ij} je produkt i -te vrstice A in j -tega stolpca B ,
- $c_i = Ab_i$: i -ti stolpec C je produkt A in i -tega stolpca B ,
- $C = \sum_{i=1}^n a_i \beta_i^T$: C je vsota produktov stolpcev A in vrstic B .

Matriko z obliko xy^T , kjer je $x, y \neq 0$, imenujemo *diada* in ima rang ena.

Lastnosti matrik

$n \times n$ matrika A je *nesingularna*, če izpolnjuje ekvivalentne pogoje:

- obstaja inverz A^{-1} , tako da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$,
- $\det(A) \neq 0$,
- $\text{rang}(A) = n$ (maksimalno število linearno neodvisnih vrstic ali stolpcev),
- ne obstaja $x \neq 0$, da je $Ax = 0$.

Matrika A je *simetrična*, če velja $A = A^T$ oz. *hermitska*, če velja $A = A^H$. Simetrična matrika je *pozitivno definitna*, če za vsak $x \neq 0$ velja $x^T Ax > 0$. Hermitska matrika je pozitivno definitna, če za vsak $x \neq 0$ velja $x^H Ax > 0$.

Če za skalar λ in vektor $x \neq 0$ velja $Ax = \lambda x$ je λ *lastna vrednost* in x *lastni vektor*. Vsaka $n \times n$ matrika ima n lastnih vrednosti, ki so ničle karakterističnega polinoma $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Lastne vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ realne simetrične matrike so realne, lastne vektorje $x_1, \dots, x_n$ pa lahko izberemo tako, da so ortonormirani, torej $x_i^T x_j = \delta_{ij}$. Lastne vrednosti simetrične pozitivno definitne matrike so pozitivne.

3.2 Vektorske in matrične norme

Definicija. Vektorska norma je preslikava $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trikotniška neenakost),

za vsak $x, y \in \mathbb{C}^n$ in $\alpha \in \mathbb{C}$.

Najbolj znane vektorske norme so:

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (1-norma),
- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$ (2-norma ali evklidska norma),
- $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ (∞ -norma ali max norma).

Ekvivalenca norm

Poljubni vektorski normi $\|\cdot\|_a$ in $\|\cdot\|_b$ sta *ekvivalentni*, kar pomeni, da obstajata konstanti $C_1, C_2 > 0$, da za vsak $x \in \mathbb{C}^n$ velja

$$C_1\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C_2\|x\|_a.$$

Za najbolj znane norme veljajo ocene:

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \end{aligned}$$

Cauchy-Schwartzeva neenakost: $|y^H x| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$