

VAJE ANA3
FINANČNA MATEMATIKA
2016 – 17

BLAŽ JELENC

1.kolokvij

ANA3 Finančna matematika 2.letnik

2.12.2016

18⁰⁰ 2.05

 90 min

- (1) [25%] Dano je vektorsko polje

$$\vec{v}(x, y, z) = (x + 2y + az, 2x - 3y - z, 4x - y + 2z).$$

Določi konstanto a tako, da bo polje $\vec{v}$ potencialno in nato izračunaj

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

za poljubno krivuljo C , ki se začne v točki $(1, 1, 1)$ in konča v točki $(2, 3, 5)$.

- (2) [25%] Dana je krivulja C v polarnih koordinatah

$$r(\varphi) = 2 + 4 \cos(\varphi), \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

in ravninsko vektorsko polje

$$\vec{v}(x, y) = (y^2 - e^{2x} + xy, 2xy - x^2).$$

S pomočjo Greenove formule zračunaj

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

v smeri naraščajočega parametra φ .

- (3) [25%] Izračunaj z -koordinato težišča območja $V \subset \mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq z^2, z \leq 2, z \geq 1\}.$$

- (4) [25%] Dan je integral s parametrom

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos xt}{t} e^{-t} dt.$$

Preveri, da je $F(x)$ definiran za vsak $x \in \mathbb{R}$ in nato integral izračunaj.

Preveri enakomerno konvergenco, kjer je to potrebno.

(Odgovore utemelji!)

Rešitve - 1.kolokvij

- (1) **Rešitev:** Iščemo funkcijo $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, da bo $\text{grad} u = \vec{v}$ (8pt). V procesu iskanja funkcije u opazimo, da mora veljati $a = 4$ in nazadnje dobimo $u = 4xz - yz + z^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2$ (8pt). Vrednost integrala pa je sedaj (4pt)

$$u(2, 3, 5) - u(1, 1, 1) = \frac{101}{2} - 5 = \frac{91}{2}.$$

- (2) **Rešitev:**

S pomočjo Greenove formule dobimo (10pt)

$$\begin{aligned} \int_C \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \iint_D (Q_x - P_y) dx dy - \int_{(0,2)}^{(0,0)} \vec{v} \cdot d\vec{s} - \int_{(0,0)}^{(6,0)} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \\ &= \iint_D (-3x) dx dy - \int_0^2 0 dt - \int_0^6 -6e^{12t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2+4\cos\varphi} -3r \cos\varphi r dr = \\ &= -24(3 + \pi) - \frac{1}{2}(1 - e^{72}) \end{aligned}$$

(10pt)

- (3) **Rešitev:** Volumen dobimo z izračunom (v sferičnih koord. (7pt))

$$Vol = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_{\frac{1}{\cos\vartheta}}^{\frac{2}{\cos\vartheta}} r^2 \sin\vartheta dr = \dots = \frac{7\pi}{3}.$$

(9pt)

$$\bar{z} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_{\frac{1}{\cos\vartheta}}^{\frac{2}{\cos\vartheta}} r^2 \sin\vartheta r \cos\vartheta dr = \dots = \frac{15\pi}{4}.$$

(9pt) Težišče je na z -koordinati $\frac{45}{28}$.

- (4) **Rešitev:** Funkcija pod integralom je pri $t = 0$ omejena, konvergenca integrala v neskončnosti pa ni problematična, ker je

$$\left| \int_B^\infty \frac{1 - \cos xt}{t} e^{-t} dt \right| \leq \int_B^\infty = e^{-B}$$

torej integral tudi enakomerno konvergira (8pt).

Z parcialnim odvajanjem pod integralom dobimo

$$\int_0^\infty \sin xt e^{-t} dt$$

kar je zopet enakomerno konvergenten integral (podoben sklep kot zgoraj), torej je

$$F'(x) = \int_0^\infty \sin(xt) e^{-t} dt = \frac{x}{1+x^2}$$

(9pt) in zato $F(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + (C=0)$ (8pt).

2.kolokvij

ANA3 Finančna matematika 2.letnik

18.1.2017

18⁰⁰ 2.01

 105 min

- (1) Dano naj bo območje $D \subset \mathbb{R}^3$ in vektorsko polje $\vec{v}(x, y, z) = (0, 0, z)$. Rob območja naj bo orientiran z zunanjo normalo.

(a) [5%] Pokaži, da velja enakost

$$\text{Vol}(D) = \oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

- (b) [20%] S pomočjo zgornje enakosti izračunaj volumen območja, katerega rob je parametriziran z

$$\sigma(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin 2v),$$

kjer je

$$u \in [0, 2\pi] \quad v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

- (2) [25%] Izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 4x + 5)^2}.$$

- (3) [25%] Določi splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 4y = x \cos x.$$

- (4) Naj bo (X, d) poln metrični prostor in $f : X \rightarrow X$ dana preslikava z lastnostjo, da je

$$f^2 = f \circ f : X \rightarrow X$$

kontrakcija.

(a) [10%] Pokaži, da ima preslikava f natanko eno negibno točko.

(b) [15%] Pokaži, da preslikava $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dana s predpisom

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

ni kontrakcija, preslikava $f^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ pa je kontrakcija. Določi še negibno točko preslikave f .

(Odgovore utemelji!)

Rešitve - 2.kolokvij**(1) Rešitev:**

(a) Sledi iz Gaussovega izreka $\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{v}) dV = \iiint_D 1 dV = \operatorname{Vol}(D)$.

(b) $\sigma_u = (-\cos v \sin u, \cos v \cos u, 0)$, $\sigma_v = (-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, 2 \cos 2v)$ od koder dobimo

$$\sigma_u \times \sigma_v = (2 \cos v \cos 2v \cos u, 2 \cos v \cos 2v \sin u, \cos v \sin v)$$

($\sigma_u \times \sigma_v$ tudi kaže ven iz območja), tako da je po zgornji formuli

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(D) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du \int_0^{2\pi} \sin 2v \cos v \sin v dv = 2\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 v \cos^2 v dv = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4v}{2} dv = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

(2) Rešitev: Ustrezna kompleksna funkcija je

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 4z + 5)^2} = \frac{1}{(z - (2 + i))^2(z - (2 - i))^2}$$

in velja $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 4x + 5)^2} = 2\pi i \sum_{z_i \in \mathbb{C}^+} \operatorname{Res}(f, z_i)$. Najti moramo torej samo $\operatorname{Res}(f, 2 + i)$. Ker gre za pol druge stopnje ga dobimo kot

$$\operatorname{Res}(f, 2 + i) = \lim_{z \rightarrow 2+i} \left(\frac{1}{(z - (2 - i))^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{-2}{(z - (2 - i))^3} = \frac{1}{4i}$$

in rezultat je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 4x + 5)^2} = \frac{\pi}{2}$$

(3) Rešitev: Rešitev homogene enačbe $y'' + 4y = 0$ je oblike $y = A \cos 2x + B \sin 2x$. Partikularno dobimo pa kot realni del partikularne rešitve enačbe

$$y'' + 4y = x e^{ix}$$

Ker i ni ničla karakterističnega polinoma lahko vzamemo nastavek oblike

$$y_p = (Cx + D)e^{ix}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo $C = \frac{1}{3}$ in $D = \frac{-2i}{9}$. Realni del rešitve $(Cx + D)e^{ix}$ pa potem znaša

$$y_p = \frac{x}{3} \cos x + \frac{2}{9} \sin x.$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{x}{3} \cos x + \frac{2}{9} \sin x \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(4) Rešitev:

- (a) Ker je f^2 skrčitev, obstaja natanko en $x_0 \in X$, da je

$$f^2(x_0) = x_0.$$

Uporabimo f na obeh straneh $f(f^2(x_0)) = f(x_0)$, oziroma

$$f^2(f(x_0)) = f(x_0)$$

torej je $f(x_0)$ tudi negibna točka preslikave f^2 . Torej je $f(x_0) = x_0$. Vsaka fiksna točka preslikave f pa je tudi fiksna točka preslikave f^2 , torej je res en sam x_0 , da je $f(x_0) = x_0$.

- (b) Problem je pri $x = 0$. Naj bo $q \in [0, 1)$ in si pogledamo neenačbo

$$|f(0) - f(x)| \leq q|x - 0|$$

To se poenostavi v $\frac{1}{1+x} \leq q$ oziroma $x \geq \frac{1-q}{q}$, torej za $x < \frac{1-q}{q}$ skrčitveni pogoj ne velja več. Pri $f^2(x) = \frac{2+x}{1+x}$ pa vidimo, da je $|(f^2)'(x)| \leq \frac{1}{4}$, torej je f^2 skrčitev. Negibna točka je določena z $\frac{1}{1+x} = x$ od koder dobimo $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Izpit 1

ANA3 Finančna matematika 2.letnik

🕒 90 min

- (1) Dana naj bo ploskev

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ in } z \geq 0\}$$

in vektorsko polje $\vec{v}(x, y, z) = (xy, y \sin z, R(x, y, z))$. Določi funkcijo R tako, da bo $\operatorname{div} \vec{v} = 2$ in $R(x, y, 0) = 1 + x^2 y^2$ ter nato izračunaj

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

(Ploskev S je orientirana z normalnim vektorskim poljem, ki ima v točki $(0, 0, 2) \in S$ vrednost $(0, 0, 1)$.)

- (2) Naj bo funkcija $F : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dana s predpisom

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t^x \ln t}.$$

Izračunaj odvod $F'(x)$. Preveri enakomerno konvergenco, kjer je to potrebno.

- (3) Dana je kompleksna funkcija

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)(e^{\frac{z\pi}{4}} - 1)}.$$

- (a) Izračunaj glavni del Laurentove vrste funkcije f v točki $z = 0$.
(b) Dana naj bo pot γ v $\mathbb{C}$, s parametrizacijo

$$\gamma(t) = 3 \cos t + 2i + i 3 \sin t \quad t \in [0, 2\pi].$$

Izračunaj $\oint_{\gamma} f(z) dz$.

- (4) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$x^2 y'' - xy' + y = (1 + \ln x)x.$$

REŠITVE

- (1) Imamo pogoj $y + \sin z + \frac{\partial R}{\partial z} = 2$, kar se integrira v

$$R = 2z - yz + \cos z + \varphi(x, y),$$

kjer je $\varphi(x, y) = x^2 y^2$. Potem je

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iiint_V 2 dV - \iint_{K(0,2)} (-1 - x^2 y^2) dx dy = \frac{32\pi}{3} + \iint_{K(0,2)} (1 + x^2 y^2) dx dy$$

$$\frac{32\pi}{3} + \frac{20\pi}{3} = \frac{52\pi}{3}.$$

- (2) $F'(x) = -\int_2^\infty \frac{dt}{t^x}$ enak.konv. na $\in [2, \infty)$ in nazadnje

$$F'(x) = \frac{2^{1-x}}{1-x}.$$

- (3) Glavni del je $\frac{1}{\pi} \frac{1}{z} + \dots$

Singularnost je še (tista znotraj krivulje) $2i$. $Res(f, 0) = \frac{1}{\pi}$, $Res(f, 2i) = \frac{1}{4i(-1+i)}$.

- (4) Homogena rešitev je $y_H = Ax + Bx \ln x$, nastavek za partikularno pa je

$$y_p = (C + D \ln x)(\ln x)^2 x$$

in dobimo $C = \frac{1}{2}$ in $D = \frac{1}{6}$.

Izpit 2

ANA3 Finančna matematika 2.letnik

🕒 120 min

- (1) [25%] Dano je vektorsko polje $\vec{v}_0(x, y, z) = (xy, zx - y, f(x, y, z))$ in orientirana krivulja $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1 \text{ in } z = 1\}$. Poišči kakšno funkcijo $f(x, y, z)$ za katero bo integral

$$\iint_S \vec{v}_0 \cdot d\vec{S}$$

enak za vse ploskve S , ki imajo krivuljo C za rob (orientacija ploskve S naj bo določena z orientacijo krivulje C). Nato izračunaj še $\oint_C \vec{v}_0 \cdot d\vec{s}$.

- (2) [25%] Določi splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 2y' + y = \sin x.$$

- (3) [25%] Dana je kompleksna funkcija $f(z) = \frac{e^{\frac{z}{2}}}{1+e^z}$. Določi definicijsko območje funkcije f . Dana naj bo krivulja $C = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)(\operatorname{Im}(z) - 2\pi)\}$.

- (a) Naj bo $R > 0$ in naj bo krivulja K_R daljica, ki povezuje točki $R + i(\pi - \sqrt{R + \pi^2})$ in $R + i(\pi + \sqrt{R + \pi^2})$. Pokaži, da je

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} f(z) dz = 0.$$

- (b) S pomočjo residuumov izračunaj

$$\int_C f(z) dz.$$

- (4) [25%] Naj bo $M = \mathcal{C}^1([0, 1])$ množica vseh zvezno odvedljivih funkcij na intervalu $[0, 1]$.

- (a) Ali je preslikava $d_1 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, dana z

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_0^1 |f'(x) - g'(x)| dx$$

metrika?

- (b) Denimo, da zaporedje funkcij $f_n \in M$ konvergira v metriki d_1 k funkciji $f \in M$. Pokaži, da potem zaporedje $\{f_n\}$ po točkah konvergira k f .

- (c) Dano je zaporedje funkcij $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f_n(x) = nxe^{-nx}$. Pokaži, da zaporedje po točkah konvergira k funkciji 0. Ali $\{f_n\}$ konvergira k funkciji 0 v metriki d_1 ?

Rešitve

- (1) Funkcijo f izberemo tako, da bo $\operatorname{div} \vec{v}_0 = 0$. Od tu dobimo npr. $f(x, y, z) = z - yz$. Integral $\oint_C \vec{v}_0 \cdot d\vec{s}$ pa nadomestimo z integralom rotorja po disku z normalo $(0, 0, 1)$, rezultat je 2π ($\operatorname{rot} \vec{v}_0 = (\dots, \dots, z - x)$ oz. $(\dots, \dots, 1 - x)$ na disku).
- (2) $y = Ae^x + Bxe^x$. Partikularno rešitev poiščemo kot imaginarni del $y_p = Ce^{ix}$.
- (3) Daljico parametriziramo $z = R + it$, $t \in [\pi - \sqrt{R + \pi^2}, \pi + \sqrt{R + \pi^2}]$ in dobimo

$$\left| \int_{K_R} f(z) dz \right| = \left| \int_{\pi - \sqrt{R + \pi^2}}^{\pi + \sqrt{R + \pi^2}} \frac{e^{R/2} e^{it/2}}{1 + e^R e^{it}} i dt \right| \leq \int_{\pi - \sqrt{R + \pi^2}}^{\pi + \sqrt{R + \pi^2}} \frac{e^{R/2}}{e^R - 1} dt = \frac{e^{R/2}}{e^R - 1} 2\sqrt{R + \pi^2} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

Za $\int_C f(z) dz$ izračunamo residuum v $i\pi$, ki je enak $-i$, torej je integral enak 2π .

- (4) (a) Je metrika.
- (b) Vprašanje lahko reduciramo na: g_n v d_1 metriki konvergira k 0, ali potem g_n po točkah konvergira k 0?
- Naj bo $x_0 \in [0, 1]$ takšna, da je $\lim g_n(x_0) \neq 0$. To pomeni, da za neskončno členov zaporedja g_n velja, da je $|g_n(x_0)| > C$ (za nek C). Za poljuben $\epsilon > 0$ od nekega n naprej velja

$$\int_0^1 |g_n(x)| dx + \int_0^1 |g'_n(x)| dx < \epsilon,$$

posebaj $\int_0^1 |g_n(x)| dx < \epsilon$. Torej gotovo obstaja $x_1 \in [x_0 - 2\epsilon/C, x_0]$, da je $|g_n(x_1)| < \frac{C}{2}$.

$$\int_0^1 |g'_n(x)| dx \geq \left| \int_{x_1}^{x_0} g'_n(x) dx \right| = |g_n(x_0) - g_n(x_1)| \geq \frac{C}{2}$$

torej g_n ne konvergira k 0 v metriki d_1 .

- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_1(nxe^{-nx}, 0) = \frac{2}{e}$.