

Dodatni problemi lastnih vrednosti, odprti problemi in primeri uporabe lastnih vrednosti in lastnih vektorjev

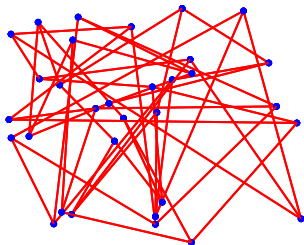
Bor Plestenjak

NLA

29. maj 2017

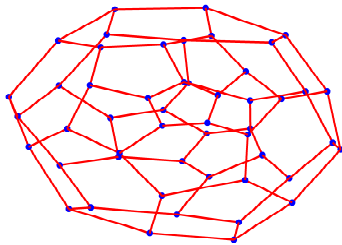
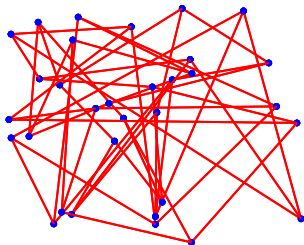
Lepo risanje grafov

Denimo, da imamo graf fullerena, a poznamo le matriko sosednosti. Če koordinate vozlišč izberemo naključno, se iz slike ne da razbrati, da je to polieder.



Lepo risanje grafov

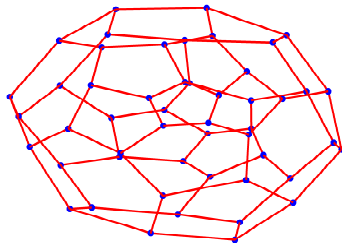
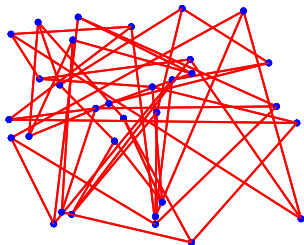
Denimo, da imamo graf fullerena, a poznamo le matriko sosednosti. Če koordinate vozlišč izberemo naključno, se iz slike ne da razbrati, da je to polieder.



Če koordinate izberemo drugače, je iz slike lepo razvidno, da gre za kubičen polieder. Kako pridemo do lepe slike?

Lepo risanje grafov

Denimo, da imamo graf fullerena, a poznamo le matriko sosednosti. Če koordinate vozlišč izberemo naključno, se iz slike ne da razbrati, da je to polieder.



Če koordinate izberemo drugače, je iz slike lepo razvidno, da gre za kubičen polieder. Kako pridemo do lepe slike?

En izmed algoritmov za lepo risanje kubičnih poliedrskih grafov (graf predstavlja oglišča in stranice nekega poliedra, kjer se v vsakem oglišču srečajo tri stranice), uporablja lastne vektorje ustreznih lastnih vrednosti.

Lepo risanje grafov 2

Grafu G na n točkah ustreza matrika sosednosti A velikosti $n \times n$, ki ima na (i, j) -tem mestu 1, če sta točki i in j povezani in sicer 0.

Če je G neusmerjen, je $A = A^T$.

Če je G kubičen graf (vsaka točka ima natanko tri sosede), potem je očitno ena lastna vrednost (ki je ravno največja) ravno 3, z lastnim vektorjem $[1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$.

Sedaj izberemo λ_2 , λ_3 in λ_4 ter normirane lastne vektorje, ki naj bodo po vrsti x , y , z . Če za koordinate i -te točke vzamemo kar $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, dobimo lepo tridimenzionalno predstavitev grafa.

Gaussove kvadrature formule

Računanje uteži in vozlov Gaussovih kvadraturenih formul se lahko prevede na iskanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev tridiagonalne matrike. Vemo, da ortonormirani polinomi zadoščajo tričlenski rekurzivni formuli

$$xp_k(x) = b_{k-1}p_{k-1}(x) + a_k p_k(x) + b_k p_{k+1}(x).$$

Gaussove kvadrature formule

Računanje uteži in vozlov Gaussovih kvadrature formul se lahko prevede na iskanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev tridiagonalne matrike. Vemo, da ortonormirani polinomi zadoščajo tričlenski rekurzivni formuli

$$x p_k(x) = b_{k-1} p_{k-1}(x) + a_k p_k(x) + b_k p_{k+1}(x).$$

Če poznamo koeficiente a_k in b_k , potem so **vozli** $x_0, \dots, x_n$ **lastne vrednosti** tridiagonalne matrike

$$T_n = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ b_0 & a_1 & b_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Gaussove kvadrature formule

Računanje uteži in vozlov Gaussovih kvadrature formul se lahko prevede na iskanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev tridiagonalne matrike. Vemo, da ortonormirani polinomi zadoščajo tričlenski rekurzivni formuli

$$xp_k(x) = b_{k-1}p_{k-1}(x) + a_k p_k(x) + b_k p_{k+1}(x).$$

Če poznamo koeficiente a_k in b_k , potem so **vozli** $x_0, \dots, x_n$ **lastne vrednosti** tridiagonalne matrike

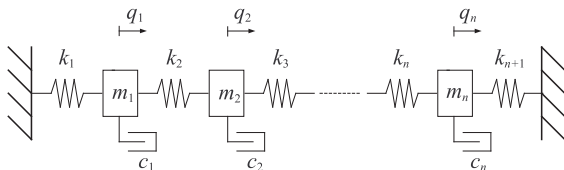
$$T_n = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ b_0 & a_1 & b_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Uteži dobimo iz **prvih komponent** ortonormiranih **lastnih vektorjev**:

$$a_i = x_{1i}^2 \int_a^b \rho(x) dx,$$

kjer je X matrika ortonormiranih lastnih vektorjev matrike T_n .

Zgled uporabe QEP



Nihanje dušenega sistema mas in vzmeti. Če predpostavimo $q_0 = q_{n+1} = 0$, potem iz Newtonovega zakona dobimo enačbe

$$m_i \ddot{q}_i(t) = -k_i (q_i(t) - q_{i-1}(t)) - k_{i+1} (q_i(t) - q_{i+1}(t)) - c_i \dot{q}_i(t),$$

$i = 1, \dots, n$, iz katerih sestavimo

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0,$$

$$M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n),$$

$$C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n),$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ & -k_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -k_n \\ & & & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}.$$

M je masna matrika, C matrika dušenja, K pa togostna matrika.

Rešitev homogene diferencialne enačbe

Če so vse lastne vrednosti QEP enostavne, ima splošna rešitev homogene diferencialne enačbe

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0,$$

obliko

$$q(t) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k e^{\lambda_k t} x_k,$$

kjer so $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ konstante, $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ so lastne vrednosti, $x_1, \dots, x_{2n}$ pa lastni vektorji QEP

$$\lambda^2 Mx + \lambda Cx + Kx = 0.$$

Rešitev homogene diferencialne enačbe

Če so vse lastne vrednosti QEP enostavne, ima splošna rešitev homogene diferencialne enačbe

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0,$$

obliko

$$q(t) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k e^{\lambda_k t} x_k,$$

kjer so $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ konstante, $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ so lastne vrednosti, $x_1, \dots, x_{2n}$ pa lastni vektorji QEP

$$\lambda^2 Mx + \lambda Cx + Kx = 0.$$

Konstante $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ določimo iz začetnih odmikov $q(0)$ in hitrosti $\dot{q}(0)$.

Rešitev homogene diferencialne enačbe

Če so vse lastne vrednosti QEP enostavne, ima splošna rešitev homogene diferencialne enačbe

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0,$$

obliko

$$q(t) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k e^{\lambda_k t} x_k,$$

kjer so $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ konstante, $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ so lastne vrednosti, $x_1, \dots, x_{2n}$ pa lastni vektorji QEP

$$\lambda^2 Mx + \lambda Cx + Kx = 0.$$

Konstante $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ določimo iz začetnih odmikov $q(0)$ in hitrosti $\dot{q}(0)$.

d.e. je stabilna: $\operatorname{re}(\lambda_k) < 0$ za vse k

d.e. je šibko stabilna: $\operatorname{re}(\lambda_k) \leq 0$ za vse k , če je $\operatorname{re}(\lambda_k) = 0$ je λ_k enostavna.

Imamo enačbo

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t).$$

Če je desna stran oblike $f(t) = e^{i\omega_0 t} f_0$, kar ustreza vsiljenemu nihanju, potem je partikularna rešitev

$$q_p(t) = e^{i\omega_0 t} \sum_{k=1}^{2n} \frac{y_k^H f_0}{i\omega_0 - \lambda_k} x_k,$$

kjer so $y_1, \dots, y_{2n}$ levi lastni vektorji.

Imamo enačbo

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t).$$

Če je desna stran oblike $f(t) = e^{i\omega_0 t} f_0$, kar ustreza vsiljenemu nihanju, potem je partikularna rešitev

$$q_p(t) = e^{i\omega_0 t} \sum_{k=1}^{2n} \frac{y_k^H f_0}{i\omega_0 - \lambda_k} x_k,$$

kjer so $y_1, \dots, y_{2n}$ levi lastni vektorji.

Če se $i\omega_0$ približa eni izmed lastnih vrednosti λ_k , se lahko pojavi **rezonanca**.

Lastna nihanja konstrukcij

Pri mehaničnih strukturah nas zanima, kako se obnašajo glede na vsiljeno nihanje. Če so lastne frekvence blizu vsiljenim, lahko pride do resonance in velikih poškodb.

Tako npr. zgradbe ne smejo imeti lastnih frekvenc v območju frekvenc potresov.

Leta 1831 se je v Angliji podrl most blizu Manchesterja, ko so čez strumno korakali vojaki.

Znan je tudi primer visečega mosta Tacoma Narrows iz ZDA, ki so ga leta 1940 porušili sunki vetra.

Millenium bridge



Most so odprli 10.6.2000 za 18.2 milijonov funtov ...

Millenium bridge

Most so odprli 10.6.2000 za 18.2 milijonov funtov ... in ga zaprli 12.6.2000.

Millenium bridge

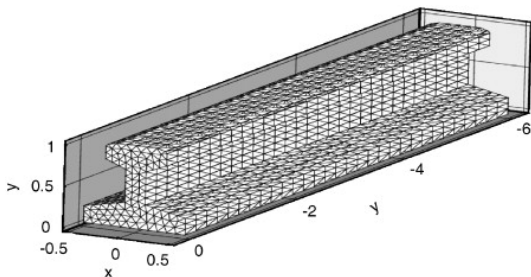


Ponovno so ga odprli 22.2.2002, potem ko so za konstrukcijo in vgradnjo sistema dušilcev porabili še 5 milijonov funtov.

Palindromski problem lastnih vrednosti in hitri vlaki

Pri vlakih se na tračnicah pojavijo vibracije kot posledica interakcije koles in tračnic. Za hitre vlake je zelo pomembno razumeti, kako se to dogaja, tako zaradi varnosti kot tudi udobja potnikov.

V Nemčiji so okrog leta 2000 začeli obravnavati ta problem v povezavi z ICE vlaki. Če za modeliranje tračnic uporabimo metodo končnih elementov



ima dobljeni kvadratni problem lastnih vrednosti obliko

$$(\lambda^2 A_1^T + \lambda A_0 + A_1)x = 0,$$

kjer je $A_0, A_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in $A_0^T = A_0$. Zaradi oblike ga imenujemo **palindromski**.

Palindromski problem lastnih vrednosti in hitri vlaki 2

Imamo palindromski kvadratni problem lastnih vrednosti

$$(\lambda^2 A_1^T + \lambda A_0 + A_1)x = 0,$$

kjer je $A_0, A_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in $A_0^T = A_0$. Izkaže se: če je λ lastna vrednost, potem to velja tudi za λ^{-1} .

V našem primeru sta A_0 in A_1 odvisni od parametra ω , ki predstavlja hitrost, A_1 pa je singularna. Za več različnih ω potrebujemo vse lastne vrednosti in vektorje. Za večjo natančnost moramo uporabiti fino mrežo, kar pomeni velike matrike.

Z obstoječimi linearizacijami ni bilo možno dobiti uporabnih približkov, težava je med drugim v tem, da se pri linearizaciji in nadaljevanju z uporabo QZ algoritma izgubi lastnost, da lastne vrednosti nastopajo v parih (λ, λ^{-1}) .

Ta zveza se ohranja v linearizaciji

$$\lambda Z + Z^T, \quad Z = \begin{bmatrix} A_1^T & A_0 - A_1 \\ A_1^T & A_1^T \end{bmatrix},$$

a še vedno ni dovolj natančna, potrebno pa je tudi preurediti QZ algoritem, da se ta zveza ohranja med iteracijo.

Reševanje PEP

PEP $P(\lambda) = \lambda^m A_m + \cdots + \lambda A_1 + A_0$ lahko lineariziramo kot GEP z matrikami velikosti $mn \times mn$.

Primer je t.i. **prva spremljevalna forma**, ki ima obliko

$$C_1(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -I \\ A_0 & A_1 & \cdots & A_{m-1} \end{bmatrix}$$

Če so vse matrike npr. tridiagonalne, se v C_1 to izgubi. Za tridiagonalne matrike je npr. hitreje uporabiti kar $P(\lambda)$ in reševati $\det(P(\lambda)) = 0$.

Reševanje PEP

PEP $P(\lambda) = \lambda^m A_m + \cdots + \lambda A_1 + A_0$ lahko lineariziramo kot GEP z matrikami velikosti $mn \times mn$.

Primer je t.i. **prva spremljevalna forma**, ki ima obliko

$$C_1(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -I \\ A_0 & A_1 & \cdots & A_{m-1} \end{bmatrix}$$

Če so vse matrike npr. tridiagonalne, se v C_1 to izgubi. Za tridiagonalne matrike je npr. hitreje uporabiti kar $P(\lambda)$ in reševati $\det(P(\lambda)) = 0$.

Problem pri splošnem PEP (tudi QEP) je, da ne obstaja začetna transformacija, ki bi vse matrike hkrati transformirala v lepo obliko (tridiagonalna, Hessenbergova), ki bi omogočala ekonomičen izračun $\det(P(\lambda))$.

Hamiltonske matrike

Matrika $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ je **Hamiltonska**, če ima bločno obliko

$$H = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix},$$

kjer sta G in F simetrični $n \times n$ matriki.

H je podobna matriki $-H^T$, zato lastne vrednosti nastopajo v četvorkah

$$(\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda})$$

oziroma parih, če ležijo na realni ali imaginarni osi.

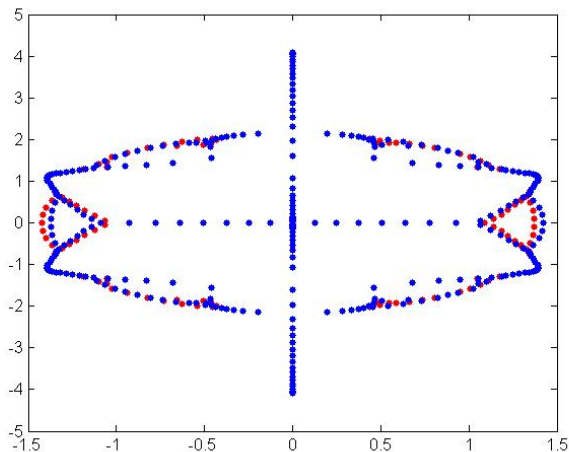
Hamiltonske matrike so pomembne pri sistemih upravljanja za reševanje algebraične Riccatijeve enačbe

$$XA + A^T X + Q - XSX = 0.$$

Zaenkrat še ni znana učinkovita metoda, ki bi pri računanje lastnih vrednosti ohranjala strukturo lastnih vrednosti.

Hamiltonske matrike - zgled v Matlabu

```
A = gallery('grcar',150);  
H = [A -1*eye(150); 1*eye(150) -A'];  
c = eig(H);  
plot(real(c),imag(c),'r',real(-c),imag(-c),'b','MarkerSize',12)
```



Sturm-Liouvillov robni problem lastnih vrednosti

Na intervalu $[a, b]$ iščemo lastno vrednost λ in neničelno funkcijo y , ki zadošča

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y,$$

in robnima pogojema $y(a) = y(b) = 0$, pri čemer za koeficienta p in q velja $p(x) > 0$ in $q(x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$.

Sturm-Liouvillov robni problem lastnih vrednosti

Na intervalu $[a, b]$ iščemo lastno vrednost λ in neničelno funkcijo y , ki zadošča

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y,$$

in robnima pogoje $y(a) = y(b) = 0$, pri čemer za koeficienta p in q velja $p(x) > 0$ in $q(x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$.

Pri diferenčni metodi interval $[a, b]$ razdelimo z ekvidistantnimi točkami $x_0 = a$, $x_i = x_0 + ih$, kjer je $h = (b - a)/(n + 1)$. Naj bo y_i približek za $y(x_i)$, ki ga iščemo.

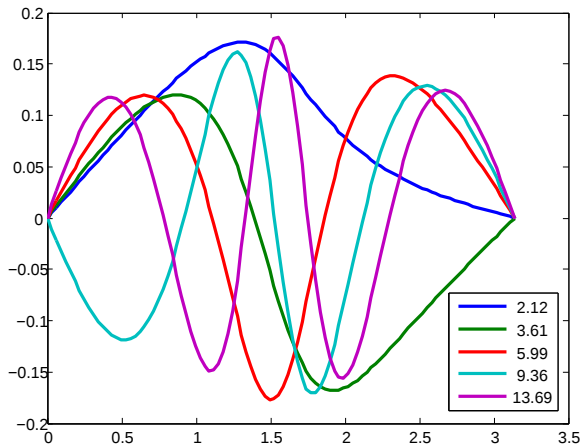
Enačbo v točki x_i , $i = 1, \dots, n$, aproksimiramo z

$$\frac{p(x_i - h/2)(y_i - y_{i-1}) + p(x_i + h/2)(y_i - y_{i+1})}{h^2} + q(x_i)y_i = \lambda y_i.$$

Dobimo $Ay = \lambda y$, kjer je A tridiagonalna simetrična matrika.

Zgled robnega problema

$[a, b] = [0, \pi]$, $p(x) = 1 - \frac{4}{5} \sin^2 x$, $q(x) = x$ in robna pogoja $y(a) = y(b) = 0$.



Lastna nihanja dvodimenzionalnih bobnov

Imamo opno na območju $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s fiksnim robom. Lastne frekvence in funkcije dobimo iz enačbe

$$\Delta u = \omega^2 u,$$

kjer je na robu pogoj $u|_{\partial\Omega} = 0$ (fiksni rob).

Lastna nihanja dvodimenzionalnih bobnov

Imamo opno na območju $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s fiksnim robom. Lastne frekvence in funkcije dobimo iz enačbe

$$\Delta u = \omega^2 u,$$

kjer je na robu pogoj $u|_{\partial\Omega} = 0$ (fiksni rob).

Numerično to lahko rešimo na več načinov, npr:

- V primeru lepega območja lahko uporabimo metodo separacije spremenljivk. Deluje npr. za okroglo in pravokotno opno. Za poljubno območje metode ne moremo uporabiti.
- Diferenčna metoda: območje prekrijemo s čim bolj fino mrežo in iščemo vrednosti v točkah te mreže.
- Metoda končnih elementov: območje aproksimiramo s triangulacijo in za rešitev iščemo kosoma linearno funkcijo nad triangulacijo.

Lastna nihanja dvodimenzionalnih bobnov

Imamo opno na območju $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s fiksnim robom. Lastne frekvence in funkcije dobimo iz enačbe

$$\Delta u = \omega^2 u,$$

kjer je na robu pogoj $u|_{\partial\Omega} = 0$ (fiksni rob).

Numerično to lahko rešimo na več načinov, npr:

- V primeru lepega območja lahko uporabimo metodo separacije spremenljivk. Deluje npr. za okroglo in pravokotno opno. Za poljubno območje metode ne moremo uporabiti.
- Diferenčna metoda: območje prekrijemo s čim bolj fino mrežo in iščemo vrednosti v točkah te mreže.
- Metoda končnih elementov: območje aproksimiramo s triangulacijo in za rešitev iščemo kosoma linearno funkcijo nad triangulacijo.

V zadnjih dveh primerih moramo rešiti problem lastnih vrednosti za matriko A , ki je ponavadi velika in razpršena. Lastne vrednosti A so približki za prave lastne frekvence, nekatere boljši, nekateri približki pa so lahko povsem napačni.

Lastna nihanja dvodimenzionalnih bobnov

Kac je leta 1966 napisal članek "Can you hear the shape of a drum?"

Lastna nihanja dvodimenzionalnih bobnov

Kac je leta 1966 napisal članek "Can you hear the shape of a drum?"

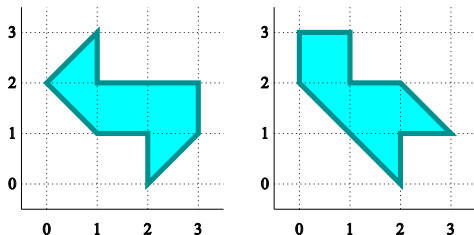
Zanimalo ga je, ali lahko obstajata dva različna bobna (opni), ki imata povsem enake lastne frekvence.

Lastna nihanja dvodimenzionalnih bobnov

Kac je leta 1966 napisal članek "Can you hear the shape of a drum?"

Zanimalo ga je, ali lahko obstajata dva različna bobna (opni), ki imata povsem enake lastne frekvence.

Odgovor so našli Gordon, Web in Wolpert leta 1992, ko so skonstruirali različni izospektralni opni:



Linearni zvezni časovno nespremenljivi kontrolni sistem lahko opišemo z enačbama

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2)$$

kjer so $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika stanja, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vhodna matrika, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ izhodna matrika, $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ matrika direktnega prenosa, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ vhodni signal in $y(t) \in \mathbb{R}^r$ izhodni signal. Ponavadi je $m \leq n$ in $r \leq n$. Enačbi (1) pravimo enačba stanja in (2) je izhodna enačba.

Stanje x_0 in vhod na časovnem intervalu (t_0, t) določata izhod za $t \geq t_0$.

Linearni zvezni časovno nespremenljivi kontrolni sistem lahko opišemo z enačbama

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2)$$

kjer so $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika stanja, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vhodna matrika, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ izhodna matrika, $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ matrika direktnega prenosa, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ vhodni signal in $y(t) \in \mathbb{R}^r$ izhodni signal. Ponavadi je $m \leq n$ in $r \leq n$. Enačbi (1) pravimo enačba stanja in (2) je izhodna enačba.

Stanje x_0 in vhod na časovnem intervalu (t_0, t) določata izhod za $t \geq t_0$.

Splošna rešitev je

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Linearni zvezni časovno nespremenljivi kontrolni sistem lahko opišemo z enačbama

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2)$$

kjer so $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika stanja, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vhodna matrika, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ izhodna matrika, $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ matrika direktnega prenosa, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ vhodni signal in $y(t) \in \mathbb{R}^r$ izhodni signal. Ponavadi je $m \leq n$ in $r \leq n$. Enačbi (1) pravimo enačba stanja in (2) je izhodna enačba.

Stanje x_0 in vhod na časovnem intervalu (t_0, t) določata izhod za $t \geq t_0$.

Splošna rešitev je

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Homogeni sistem ($B = 0$) je

- asimptotično stabilen, če za vse lastne vrednosti velja $\operatorname{re}(\lambda_k) < 0$;
- stabilen, če za vse lastne vrednosti velja $\operatorname{re}(\lambda_k) \leq 0$, tiste lastne vrednosti, kjer je $\operatorname{re}(\lambda_k) = 0$ pa so polenostavne;
- nestabilen, če obstaja lastna vrednost z $\operatorname{re}(\lambda_k) > 0$ ali pa defektna lastna vrednost z $\operatorname{re}(\lambda_k) = 0$.

Markovske verige

Denimo, da imamo N stanj in čase $0, 1, 2, \dots$. Prehodna matrika $P^{(k)}$ predstavlja verjetnosti, da sistem v času k preide iz enega stanja v drugo. Velja

$$P_{ij}^{(k)} = P(X_k = j | X_{k-1} = i).$$

Matrika $P^{(k)}$ je **stohastična**. Elementi so nenegativni, vsota vsake vrstice je 1.

Markovske verige

Denimo, da imamo N stanj in čase $0, 1, 2, \dots$. Prehodna matrika $P^{(k)}$ predstavlja verjetnosti, da sistem v času k preide iz enega stanja v drugo. Velja

$$P_{ij}^{(k)} = P(X_k = j | X_{k-1} = i).$$

Matrika $P^{(k)}$ je **stohastična**. Elementi so nenegativni, vsota vsake vrstice je 1. Pri Markovskih verigah nas zanima, kolikšna je verjetnost, da bo po zelo dolgem času sistem v izbranem stanju.

Markovske verige

Denimo, da imamo N stanj in čase $0, 1, 2, \dots$. Prehodna matrika $P^{(k)}$ predstavlja verjetnosti, da sistem v času k preide iz enega stanja v drugo. Velja

$$P_{ij}^{(k)} = P(X_k = j | X_{k-1} = i).$$

Matrika $P^{(k)}$ je **stohastična**. Elementi so nenegativni, vsota vsake vrstice je 1. Pri Markovskih verigah nas zanima, kolikšna je verjetnost, da bo po zelo dolgem času sistem v izbranem stanju.

Če je začetna razporeditev $q^{(0)} = (q_1^{(0)}, \dots, q_N^{(0)})$, potem je $q^{(k)} = q^{(k-1)} P^{(k)}$ in

$$q^{(k)} = q^{(0)} P^{(1)} \dots P^{(k)}.$$

V primeru, ko imamo homogen sistem, je $P^{(i)} = P$ in velja $q^{(k)} = q^{(k-1)} P$. Za stacionarno rešitev q tako velja $q = qP$, torej je q^T levi lastni vektor za P za lastno vrednost 1.

Markovske verige

Denimo, da imamo N stanj in čase $0, 1, 2, \dots$. Prehodna matrika $P^{(k)}$ predstavlja verjetnosti, da sistem v času k preide iz enega stanja v drugo. Velja

$$P_{ij}^{(k)} = P(X_k = j | X_{k-1} = i).$$

Matrika $P^{(k)}$ je **stohastična**. Elementi so nenegativni, vsota vsake vrstice je 1. Pri Markovskih verigah nas zanima, kolikšna je verjetnost, da bo po zelo dolgem času sistem v izbranem stanju.

Če je začetna razporeditev $q^{(0)} = (q_1^{(0)}, \dots, q_N^{(0)})$, potem je $q^{(k)} = q^{(k-1)} P^{(k)}$ in

$$q^{(k)} = q^{(0)} P^{(1)} \dots P^{(k)}.$$

V primeru, ko imamo homogen sistem, je $P^{(i)} = P$ in velja $q^{(k)} = q^{(k-1)} P$.

Za stacionarno rešitev q tako velja $q = qP$, torej je q^T levi lastni vektor za P za lastno vrednost 1.

Če je P ireducibilna, potem je po Perron-Frobeniusovi teoriji 1 res dominantna lastna vrednost, lastni vektor pa ima nenegativne komponente. Če ni druge lastne vrednosti z absolutno vrednostjo 1, potem je lastni vektor q , za katerega velja $\|q\|_1 = 1$ stacionarna porazdelitev.

Najmanjši kvadrati z omejitvami

Za dano simetrično matriko A in vektor b iščemo

$$\min\{x^T A x - 2b^T x : x^T x = \alpha^2\}$$

Najmanjši kvadrati z omejitvami

Za dano simetrično matriko A in vektor b iščemo

$$\min\{x^T A x - 2b^T x : x^T x = \alpha^2\}$$

Uporabimo Langrangeve množitelje in definiramo

$$\varphi(x, \lambda) = x^T A x - 2b^T x - \lambda(x^T x - \alpha^2)$$

Z odvajanjem po x in λ dobimo enačbi

$$Ax = \lambda x, \quad \alpha^2 = x^T x.$$

Najmanjši kvadrati z omejitvami

Za dano simetrično matriko A in vektor b iščemo

$$\min\{x^T A x - 2b^T x : x^T x = \alpha^2\}$$

Uporabimo Langrangeve množitelje in definiramo

$$\varphi(x, \lambda) = x^T A x - 2b^T x - \lambda(x^T x - \alpha^2)$$

Z odvajanjem po x in λ dobimo enačbi

$$Ax = \lambda x, \quad \alpha^2 = x^T x. \quad (3)$$

Izkaže se, da za rešitev potrebujemo najmanjšo lastno vrednost λ .

Če predpostavimo, da λ ni lastna vrednost A , lahko definiramo

$$y = (A - \lambda I)^{-2} b = (A - \lambda I)^{-1} x.$$

Sledi, da je sistem (3) ekvivalenten

$$b^T y - \alpha^2 = 0$$

$$(A - \lambda I)^2 y = b.$$

Tako iz $(b^T y)/\alpha^2 = 1$ pridemo do QEP

$$(\lambda^2 I - 2\lambda A + (A^2 - \alpha^{-2} b b^T)) y = 0.$$

Ko en parameter ni dovolj...

Problem nihanja opne $\Delta u + \omega^2 u = 0$ na Ω , $u|_{\partial\Omega} = 0$ in separacija spremenljivk:

- pravokotnik $\Omega = [0, a] \times [0, b] \implies (\omega^2 = \lambda + \mu)$

$$\begin{aligned}x'' + \lambda x &= 0, & x(0) &= x(a) = 0, \\y'' + \mu y &= 0, & y(0) &= y(b) = 0.\end{aligned}$$

- krog: $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2\}$, polarne koordinate $\implies$

$$\begin{aligned}\Phi'' + \lambda \Phi &= 0, & \Phi(0) &= \Phi(2\pi) = 0, \\r^{-1}(rR')' + (\omega^2 - \lambda r^{-2})R &= 0, & R(0) &< \infty, R(a) = 0.\end{aligned}$$

- elipsa: $\Omega = \{(x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2 \leq 1\}$, eliptične koordinate ($\alpha > \beta$)

$\implies$ modificirana Mathieujeva in Mathieujeva enačba

$$\begin{aligned}F''(\xi) - (\lambda - 2\mu \cosh(2\xi))F(\xi) &= 0, & F(0) &= F(\xi_0) = 0, \\G''(\eta) + (\lambda - 2\mu \cos(2\eta))G(\eta) &= 0, & G(0) &= G(\pi/2) = 0,\end{aligned} \tag{M}$$

Dvoparametrični problem lastnih vrednosti

Začetni problem ima obliko

$$\begin{aligned}p_1(x_1)y_1''(x_1) + q_1(x_1)y_1'(x_1) + r_1(x_1)y_1(x_1) &= \lambda s_1(x_1)y_1(x_1) + \mu t_1(x_1)y_1(x_1) \\p_2(x_2)y_2''(x_2) + q_2(x_2)y_2'(x_2) + r_2(x_2)y_2(x_2) &= \lambda s_2(x_2)y_2(x_2) + \mu t_2(x_2)y_2(x_2)\end{aligned}$$

Diskretizacija vodi k dvoparametričnemu problemu lastnih vrednosti

$$\begin{aligned}A_1 x_1 &= \lambda B_1 x_1 + \mu C_1 x_1 \\A_2 x_2 &= \lambda B_2 x_2 + \mu C_2 x_2,\end{aligned}$$

kjer so A_i, B_i, C_i matrike velikosti $n_i \times n_i$.

- lastna vrednost je par (λ, μ) ki zadošča za neničelna x_1 and x_2 ,
- lastni vektor je tenzorski produkt $x_1 \otimes x_2$.

Splošen problem ima $n_1 n_2$ lastnih vrednosti, ki so rešitve

$$\begin{aligned}\det(A_1 - \lambda B_1 - \mu C_1) &= 0 \\ \det(A_2 - \lambda B_2 - \mu C_2) &= 0.\end{aligned}$$

Viri:

- E. K.-W. Chu, T.-M. Hwang, W.-W. Lin, C.-T. Wu: Vibration of fast trains, palindromic eigenvalue problems and structure-preserving doubling algorithms, J. Comp. Appl. Math. 219 (2008), 237–252.
- mdepablo, Millenium Bridge, 14.2.2007,
https://www.youtube.com/watch?v=eAXVa__XWZ8
- J. Nielsen, Isospectral drums, 16.9.2007,
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Isospectral_drums.svg