

1	2	3	4	Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Sistem linearnih enačb je oblike

$$\sum_{j=1}^{n-i+1} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kjer so a_{ij} ter b_i dana realna števila in x_j neznanke.

- Kakšnemu pogoju morajo ustrezati števila a_{ij} , da bo imel sistem enolično rešitev?
- Zapišite **ekonomičem** algoritem za reševanje tega sistema in preštejte število potrebnih operacij (zadošča red števila operacij).
- Poiščite rešitev v primeru, ko je $n = 4$, vsi neničelni a_{ij} enaki 1 in $b_i = 5 - i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Rešitev: Iz zapisa sistema enačb sledi, da ga lahko zapišemo v matrični obliki kot

$$Ax = b, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m-1} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m-1} & 0 \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{m,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ker je $\det A = (-1)^k \prod_{i=1}^n a_{m-i+1,i}$, je pogoj za enolično rešljivost: $a_{m-i+1,i} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

• Sistem najlažje rešimo z "varianto" obratnega vstavljanja: Najprej iz enačbe $a_{m,1}x_1 = b_m$ izračunamo x_1 in se "pomikamo" navzgor. 1. operacija je $O(n^2)$.

• Za $n = 4$ dobimo $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

Naloga 2 [25 točk]

Prepričajte se, da ima enačba

$$-x^5 - 3x^3 + 5 = 0$$

natanko eno rešitev. Poišcite jo na tri mesta natančno tako, da uporabite metodo navadne iteracije.

Rešitev: $f(x) = -x^5 - 3x^3 + 5$

Ker je f polinom lihe stopnje, ima naj
eno realno ničlo. Toda $f'(x) = -5x^4 - 9x^2 < 0$,
zato je f monoton padajoča in rešitev ji
lahko samo ena.

Morda je najlažje, da za iteracijsko funkcijo
izberemo kar tisto iz Newtonove metode

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{-x_n^5 - 3x_n^3 + 5}{-5x_n^4 - 9x_n^2} \\ &= \frac{-5x_n^5 - 9x_n^3 + x_n^5 + 3x_n^3 - 5}{-5x_n^4 - 9x_n^2} = \frac{+4x_n^5 + 6x_n^3 - 5}{5x_n^4 + 9x_n^2} \end{aligned}$$

Ker je ničla enotana, metoda konvergira naj
kvadratično (za ustrezni začetni približek).

Dobimo: $x_0 = 1$, $x_1 = 1.0714$, $x_2 = 1.0654$

Naloga 3 [25 točk]

Uporabite Sturmovo zaporedje in ugotovite koliko lastnih vrednosti ima matrika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

na intervalu $[-1, 1]$?

Rešitev: $f_r(\lambda) = \det(A(1:r, 1:r) - \lambda I)$

$$\Rightarrow f_{r+1}(\lambda) = (a_{r+1} - \lambda) f_r(\lambda) - b_r^2 f_{r-1}(\lambda)$$

$$f_0(\lambda) = 1, \quad f_1(\lambda) = a_1 - \lambda$$

$$\Rightarrow \underline{f_0(\lambda) = 1}, \quad \underline{f_1(\lambda) = 1 - \lambda}$$

$$f_2(\lambda) = (3 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 \cdot 1 = 3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda - 1$$

$$\begin{aligned} f_3(\lambda) &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 1) - 1 \cdot (1 - \lambda) \\ &= 2\lambda^2 - 8\lambda - 2 - \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 1 - 1 \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 6\lambda - 3 \end{aligned}$$

$$f_4(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^3 + 21\lambda^2 + 15\lambda - 3$$

$$\{f_r(1)\}_{r=0}^4 = \{1, 0, -4, -4, 24\} \Rightarrow \text{št. sprememb je } 2$$

(0 sprememb kot eno spremembo)

$$\{f_r(-1)\}_{r=0}^4 = \{1, 2, 4, 10, 14\} \Rightarrow \text{št. sprememb je } 4 \Rightarrow 2 \text{ lastni vrednosti na } [-1, 1] !!$$

Naloga 4 [25 točk]

Rešujete začetni problem

$$y'' = -xy, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Uporabite eksplicitno Eulerjevo metodo za sistem diferencialnih enačb prvega reda s korakom $h = 0.25$ in določite približke za $y(0.5)$, $y'(0.5)$ in $y''(0.5)$.

Rešitev: Prevedemo na sistem prvega reda:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y' \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -x y_1 \end{aligned} \Rightarrow Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -x & 0 \end{bmatrix} Y = F(x, Y)$$

$$h = 1/4 \Rightarrow Y_1 = Y_0 + h \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Y_0$$
$$Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \frac{63}{64} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y(0.5) \approx 1/2; \quad y'(0.5) \approx \frac{63}{64}, \quad y''(0.5) \approx -0.5 \cdot \frac{63}{64} = -\frac{31.5}{64} \approx -\frac{1}{4}$$