

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Za obrnljivo matriko $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ velja: $a_{ij} = 0$, za $j > i + 1$.

- Zapišite en primer matrike A_4 .
- Izračunajte LU razcep brez pivotiranja za matriko A_3 , ki ima **neničelne** elemente enake vsoti indeksov vrstice in stolpca, kjer se nahaja.
- Vsaj koliko ničelnih elementov ima matrika U iz LU razcepa matrike A_n ? Odgovor utemeljite!

a) Ker je $a_{ij} = 0$ za $j > i + 1$ opazimo, da je matrika A_n spodnja trikotna s še eno obdiagonalno nad glavno diagonalno. Primer matrike za $n = 4$ je recimo $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ in $U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1/2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

c) Opazimo, da se pri LU razcepu zagotovo ohranijo vse ničle iz matrike A_n , ki so nad zgornjo obdiagonalno. Teh je $(n-2) + (n-3) + \dots + 1 = \sum_{i=1}^{n-2} i = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$.

Naloga 2 [25 točk]

Izvajate navadno iteracijo oblike

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2}, \quad a > 0.$$

- Prepričajte se, da zaporedje dobljenih približkov lahko konvergira le k $\sqrt[3]{a}$.
- Točno določite red konvergence iteracije.
- Uporabite iteracijo za izračun $\sqrt[3]{10}$ na dve decimalni mesti natančno. Zapišite vse zaporedne približke.

a) Če metoda konvergira, ji $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Potem mora biti $L = \frac{2L^3 + a}{3L^2} \Rightarrow$
 $3L^3 = 2L^3 + a \Rightarrow L^3 = a \Rightarrow L = \sqrt[3]{a}$

b) Izračunamo zaporedne odvode funkcije $g(x) = \frac{2x^3 + a}{3x^2}$

v točki $\sqrt[3]{a}$:

$$g'(x) = \frac{6x^2 \cdot 3x^2 - (2x^3 + a) 6x}{9x^4} = \frac{6x^4 - 6ax}{9x^4}$$
$$= \frac{2x^3 - 2a}{3x^3} \Rightarrow g'(\sqrt[3]{a}) = 0$$

$$g''(x) = \frac{6x^2 \cdot 3x^3 - (2x^3 - 2a) 9x^2}{9x^6} = \frac{18ax^2}{9x^6} = \frac{2a}{x^4}$$

$$\Rightarrow g''(\sqrt[3]{a}) = \frac{2a}{a\sqrt[3]{a}} = \frac{2}{\sqrt[3]{a}} \neq 0 \Rightarrow \text{red je } \underline{\underline{2}}$$

c) Ker je $\sqrt[3]{10}$ med 2 in 3, a blizu 2, lahko vzamemo $x_0 = 2.1$:

$$x_1 = 2.1559, \quad x_2 = 2.1544, \quad \underline{\underline{x_3 = 2.1544}}$$

Naloga 3 [25 točk]

Določite interpolacijski polinom p_3 , ki ima v točkah $x_0 = 0$ in $x_1 = \pi/2$ enako vrednost in odvod kot funkcija $f(x) = \cos x$.

Polinom lahko poiščemo s Newtonovimi oblikami:

0	1	0		
0	0	$-\frac{2}{\pi}$	$-\frac{4}{\pi^2}$	
$\frac{\pi}{2}$	0	-1	$\frac{-1 + \frac{2}{\pi}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4-2\pi}{\pi^2}$	$\frac{\frac{4-2\pi}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{16-4\pi}{\pi^3}$
$\frac{\pi}{2}$	-1			

$$p(x) = 1 - \frac{4}{\pi^2} x^2 + \frac{16-4\pi}{\pi^3} x^2 \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Naloga 4 [25 točk]

Prosti pad padalca, ki skoči iz mirujočega helikopterja, modeliramo kot začetni problem drugega reda

$$z''(t) = -g - k z'(t) |z'(t)|, \quad z(0) = z_0, \quad z'(0) = z'_0.$$

Pri tem je $z(t)$ višina padalca ob času t (v metrih), $g = 10 \text{ m/s}^2$ težni pospešek, $k = 0.01/\text{m}$, $z_0 = 2000 \text{ m}$ in $z'_0 = 0 \text{ m/s}$.

- Prevedite začetni problem drugega reda na sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda.
- Izračunajte oceno za višino, hitrost in pospešek po eni sekundi padanja, če uporabite eksplisitno Eulerjevo metodo s korakom $dt = 0.5 \text{ s}$.

$$a) \quad z_1 = z, \quad z_2 = z' \Rightarrow \quad z_1' = z_2 \quad \text{in} \quad z_2' = -g - k z_2 |z_2|$$

$$b) \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Euler: } \vec{z}^{(k+1)} = \vec{z}^{(k)} + dt F(t, \vec{z}^{(k)}),$$

$$\text{tj. } F(t, \vec{z}) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -g - k z_2 |z_2| \end{bmatrix}$$

$$\vec{z}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -10 - 0.01 \cdot 0 \cdot |0| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2000 \\ -5 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 \\ -10 - 0.01 \cdot (-5) \cdot |-5| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1997.5 \\ -5 + \frac{1}{2}(-10 + 0.25) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1997.5 \\ -9.875 \end{bmatrix}$$

$$z(1) = 1997.5 \text{ m}, \quad z'(1) = -9.875 \text{ m/s}$$

$$z''(1) = -9.0248 \text{ m/s}^2$$