

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 1. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

29. junij 2017

1. (25 točk) Naj bo $\{\lambda, \mu\} \subset (0, \infty)$. V neko mesto prihajajo turisti skladno s homogenim Poissonovim procesom N z intenziteto λ in se tam zadržijo, neodvisno od časa svojega prihoda, vsak v porazdelitvi $\text{Exp}(\mu)$ dolgo. Naj bo M_t število turistov v mestu ob času $t \in [0, \infty)$ (šteje se, da je ob prihodu turist v mestu, ob odhodu pa ne več). Določi $E[M_t]$.

Rešitev. Če so $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ prihodni časi N -ja, moremo izraziti $M_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}(S_i \leq t < S_i + E_i)$, kjer je E_i čas za katerega se zadrži i -ti obiskovalec v mestu. Tedaj je iz neodvisnosti in Tonellijevega izreka ter znanih porazdelitev $EM_t = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i \leq t < S_i + E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t ds \frac{\lambda^i s^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda s} e^{-\mu(t-s)} = \int_0^t ds \lambda e^{\lambda s} e^{-\lambda s} e^{-\mu(t-s)} = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$.

2. (25 točk) Naj bo $\lambda \in (0, \infty)$, $N \sim \text{HPP}(\lambda)$ s pripadajočim zaporedjem medprihodnih časov $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Naj bo še $n \in \mathbb{N}$ in $Z = (Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e.-enakomerno na $\{1, \dots, n\}$ -p. slučajnih spremenljivk, neodvisno od N . Definirajmo $K := \inf\{k \in \mathbb{N} : \{Z_1, \dots, Z_k\} = \{1, \dots, n\}\}$, prvi (diskreten) čas ko smo v zaporedju Z videli vse vrednosti iz $\{1, \dots, n\}$. Naj bo še $S := \sum_{i=1}^K T_i$. Določi $P(S \leq x)$ za $x \in (0, \infty)$, $E[S]$ ter $E[K]$.

Rešitev. Markirajmo N z Z , dobimo neodvisne $N^i \sim \text{HPP}(\lambda/n)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Tedaj je $S = \vee_{i=1}^n T_1^i$, kjer je T_1^i prvi prihodni čas v procesu N^i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Za $x \in (0, \infty)$ je tedaj $P(S \leq x) = \prod_{i=1}^n P(T_1^i \leq x) = (1 - e^{-\lambda x/n})^n$. Sledi $ES = \int_0^\infty P(S > x) dx = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\lambda x/n})^n] dx = \int_0^\infty \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} e^{-\lambda k x/n} (-1)^{k+1} dx = \lambda^{-1} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{n}{k}$. K je neodvisen od N , iz Waldove identitete sledi $EK = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{n}{k}$. Seveda je porazdelitev K enaka tudi $\star_{k=n}^1 \text{geom}_{\mathbb{N}}(k/n)$, in v posebnem $EK = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, kjer \star označuje konvolucijo. (Torej mora biti (cf. https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_number#Calculation) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ za vse $n \in \mathbb{N}$.)

3. (25 točk) Naj bo N Poissonov proces z zvezno funkcijo intenzitete ρ , ki zadošča $\int_0^\infty \rho(s) ds < \infty$. Dokaži da je $N_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} N_t < \infty$ s.g. in določi $P(N_\infty = k)$ za $k \in \mathbb{N}_0$.

Rešitev. Označimo $\Theta(t) := \int_0^t \rho(s) ds$ za $t \in [0, \infty]$. Ker za $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{1}(N_M = k) \rightarrow \mathbb{1}(N_\infty = k)$ /čeprav ne monotono/ ko $M \uparrow \infty$ čez \mathbb{N} , je iz dominirane konvergence $P(N_\infty = k) = \lim_{M \rightarrow \infty} P(N_M = k) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\Theta(M)^k}{k!} e^{-\Theta(M)} = \frac{\Theta(\infty)^k}{k!} e^{-\Theta(\infty)}$. V posebnem je $P(N_\infty < \infty) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} P(N_\infty = k) = 1$ (in $N_\infty \sim \text{Pois}(\Theta(\infty))$).

4. Naj bo $T = (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e.p. slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $[0, \infty)$, $\mathbf{P}(T_1 > 0) > 0$. Definirajmo $S_n := \sum_{i=1}^n T_i$ za $n \in \mathbb{N}_0$ (seveda, $S_0 = 0$), ter $N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(S_n \leq t)$ za $t \in [0, \infty)$ – pripadajoči prenovitveni proces. Bodi končno M prenovitvena mera procesa N , torej $M_t := \mathbf{E}N_t$ za $t \in [0, \infty)$.

(a) (5 točk) Naj bo $\{s, t\} \subset [0, \infty)$. Razloži zakaj je $N_{s+S_{N_t+1}} - N_t \geq N_{s+t} - N_t$.

(b) (15 točk) Dokaži, da je funkcija $M' := 1 + M$ subaditivna, tj.:

$$M'(t+s) \leq M'(t) + M'(s) \text{ za } \{s, t\} \subset [0, \infty).$$

(c) (5 točk) Najdi primer take porazdelitve T_1 in $\{s, t\} \subset [0, \infty)$, da je $\mathbf{P}(T_1 > 0) = 1$ in $M'(t+s) = M'(t) + M'(s)$.

Rešitev. (a). $S_{N_t+1} > t$ in N je nepadajoč proces, sledi prvi del. (b). Ker je $N_t + 1$ čas ustavljanja glede na naravno filtracijo procesa T , sledi iz prenovitvene lastnosti, da je $\mathbf{E}[N_{S_{N_t+1}+s} - (N_t + 1)] = \mathbf{E}N_s$, in torej $M(t+s) = \mathbf{E}N_{t+s} = \mathbf{E}N_t + \mathbf{E}[N_{t+s} - N_t] \leq \mathbf{E}N_t + \mathbf{E}[N_{S_{N_t+1}+s} - N_t] = M(t) + 1 + \mathbf{E}[N_{S_{N_t+1}+s} - (N_t + 1)] = M(t) + M(s) + 1$, od koder željeno. (c). Enakost nastopi v determinističnem procesu pri katerem je $T_i = 1$ za vse $i \in \mathbb{N}$, če vzamemo npr. $s = t = 1/2$.