

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 1. kolokvij

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

25. april 2017

1. (25 točk) Naj bodo $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n.e.p. z vrednostmi v $\mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. Tvorimo zaporedje delnih vsot $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ (kjer je $n \in \mathbb{N}_0$; v posebnem, $S_0 = 0$). Naj bo $T := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = -1\}$. V primeru, ko je $\mathbb{E}[X_1] < 0$, (i.) dokaži, da je $\mathbb{E}[T] < \infty$ in (ii.) izrazi $\mathbb{E}[T]$ z $\mathbb{E}[X_1]$. V primeru, ko je $\mathbb{E}[X_1] \geq 0$, dokaži, da je $\mathbb{E}[T] = \infty$. **Nasvet.** Wald. Koliko je S_T na $\{T < \infty\}$?

Rešitev. T je čas ustavljanja glede na naravno filtracijo procesa $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (ki sovpada z naravno filtracijo procesa — slučajnega sprehoda — $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$): $\{T = k\} = \{S_1 \neq -1, \dots, S_{k-1} \neq -1, S_k = -1\}$ za $k \in \mathbb{N}$. Na $\{T < \infty\}$ je $S_T = -1$. Naj bo najprej $\mathbb{E}X_1 \geq 0$. Če bi imeli, *per absurdum*, $\mathbb{E}T < \infty$, v posebnem $T < \infty$ s.g., bi iz Walda sledilo (gotovo je $\mathbb{E}X_1^- \leq 1 < \infty$) $-1 = \mathbb{E}S_T = \mathbb{E}X_1 \mathbb{E}T \geq 0$. Protislovje. Naj bo sedaj $\mathbb{E}X_1 < \infty$. Pri kateremkoli $N \in \mathbb{N}_0$ dobimo za čas ustavljanja $T \wedge N$ iz Waldove identitete in iz $\sum_{i=1}^{T \wedge N} X_i \geq -1$ (kar sledi iz dejstva, da imajo $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vrednosti v $\mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ in iz $S_0 = 0$), da je $-1 \leq \mathbb{E} \sum_{i=1}^{T \wedge N} X_i = \mathbb{E}X_1 \mathbb{E}[T \wedge N]$. V limiti $N \rightarrow \infty$, sledi iz monotone konvergenca, da je $\mathbb{E}T < \infty$, in v posebnem $T < \infty$ s.g. Iz Waldove identitete sledi končno (sedaj vemo, da so vsa relevantna upanja končna) $-1 = \mathbb{E}[-1] = \mathbb{E}S_T = \mathbb{E}X_1 \mathbb{E}T$, od koder $\mathbb{E}T = 1/(-\mathbb{E}X_1)$.

2. (25 točk) Naj bo $\lambda \in (0, \infty)$, $N \sim \text{HPP}(\lambda)$, $t_0 \in (0, \infty)$. Izračunaj

$$\mathbb{E}[N_{t_0} | S_2 \leq t_0]$$

(standardne oznake). Določi še $\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N_{t_0} | S_2 \leq t_0] / \mathbb{E}[N_{t_0}]$. Koliko pa je

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N_{t_0} | S_K \leq t_0] / \mathbb{E}[N_{t_0}]$$

za splošen $K \in \mathbb{N}$? Zakaj?

Rešitev. Iz $\{S_2 \leq t_0\} = \{N_{t_0} \geq 2\}$ in $N_{t_0} \sim \text{Pois}(\lambda t_0)$ dobimo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_{t_0} | S_2 \leq t_0] &= \frac{\mathbb{E}[N_{t_0} \mathbb{1}(N_{t_0} \geq 2)]}{\mathbb{P}(N_{t_0} \geq 2)} \\ &= \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} k e^{-\lambda t_0}}{1 - \mathbb{P}(N_{t_0} < 2)} \\ &= \frac{\lambda t_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} e^{-\lambda t_0}}{1 - \mathbb{P}(N_{t_0} = 0) - \mathbb{P}(N_{t_0} = 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda t_0(e^{\lambda t_0} - 1)e^{-\lambda t_0}}{1 - e^{-\lambda t_0}(1 + \lambda t_0)} \\
&= \frac{\lambda t_0(1 - e^{-\lambda t_0})}{1 - e^{-\lambda t_0}(1 + \lambda t_0)}.
\end{aligned}$$

Ker je $\mathbb{E}[N_{t_0}] = \lambda t_0$ sledi še, da je prva iskana limita enaka 1. Isti odgovor dobimo v splošnem: $\mathbb{E}[N_{t_0}|S_K \leq t_0]\mathbb{P}(S_K \leq t_0) = \mathbb{E}[N_{t_0}] - \mathbb{E}[N_{t_0}|S_K > t_0]$. Sedaj upoštevamo (i) $\mathbb{P}(S_K \leq t_0) \rightarrow 1$, $t_0 \rightarrow \infty$ (iz s.g. končnosti S_K), (ii) $0 \leq \mathbb{E}[N_{t_0}|S_K > t_0] \leq K - 1$ (iz $\{S_K > t_0\} = \{N_{t_0} \leq K - 1\}$) ter (iii) $\mathbb{E}[N_{t_0}] \rightarrow \infty$, $t_0 \rightarrow \infty$ (iz $\mathbb{E}[N_{t_0}] = \lambda t_0$), in osnovna pravila za računanje z limitami.

3. (25 točk) Naj bo $\lambda \in (0, \infty)$, $N \sim \text{HPP}(\lambda)$, $t_0 \in (0, \infty)$, $K \in \mathbb{N}$. Naj bodo $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ prihodni časi procesa N . Izračunaj

$$\mathbb{P} \left(\{N_{t_0} = K\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^K \left\{ \frac{S_i}{t_0} \in \left(\frac{i-1}{K}, \frac{i}{K} \right] \right\} \right) \right).$$

Nasvet: Pogoji na $\{N_{t_0} = K\}$.

Rešitev. S pogojevanjem na $\{N_{t_0} = K\}$ in iz lastnosti vrstilnih statistik, dobimo

$$e^{-\lambda t_0} \frac{(\lambda t_0)^K}{K!} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^K \left\{ \frac{U_{(i)}}{t_0} \in \left(\frac{i-1}{K}, \frac{i}{K} \right] \right\} \right),$$

kjer so $(U_i)_{i=1}^K$ n.e.-Unif($[0, t_0]$)-p. Slednje verjetnosti ni težko določiti: ko jih zaporedom žrebamo, je za U_1 vseeno v katerega od K razdelkov $((\frac{i-1}{K}t_0, \frac{i}{K}t_0])_{i=1}^K$ pade, U_2 mora pasti v enega izmed preostalih $K - 1$ nezasedenih razdelkov, itd. itn., U_n v zadnjega izmed preostalih nezasedenih razdelkov; formalno so vse alokacije v razdelke enako verjetne, vseh je K^K , ugodnih pa $K!$. Torej dobimo

$$e^{-\lambda t_0} \frac{(\lambda t_0)^K}{K!} \frac{K \cdots 1}{K \cdots K} = e^{-\lambda t_0} \left(\frac{\lambda t_0}{K} \right)^K.$$

4. (a) (8 točk) Naj bodo $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n.e.p. z vrednostmi v $\{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$, $Z_n := \sum_{i=1}^n X_i$ (torej $Z_0 = 0$). Izračunaj $\mathbb{P}(Z_n \geq 0)$!
Nasvet. Izrabi simetrijo.
- (b) (17 točk) Naj bo $\lambda \in (0, \infty)$, N^0 in N^1 neodvisna, $N^0 \sim \text{HPP}(\lambda/2)$, $N^1 \sim \text{HPP}(\lambda/2)$. Dokaži, da je, za $t \in (0, \infty)$,

$$\frac{\mathbb{E} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{N_s^1 \geq N_s^0\}} ds \right) - \frac{t}{2}}{\sqrt{t/\lambda}} = \frac{\int_0^{\lambda t} I_0(z) e^{-z} dz}{2\sqrt{\lambda t}},$$

kjer je $I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2}$ (za $z \in \mathbb{R}$). **Opomba.** Kot zanimivost omenimo, da je $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_0^u I_0(z) e^{-z} dz}{2\sqrt{u}} = 1/\sqrt{2\pi}$.¹

¹Sledi iz asimptotske relacije $I_0(x)e^{-x}\sqrt{2\pi x} - 1 = O(1/x)$, $x \rightarrow \infty$, glej npr. Abramowitz & Stegun 9.7.1.

Rešitev. (a). Vsekakor je $P(Z_n \geq 0) + P(Z_n \leq 0) = 1 + P(Z_n = 0)$, in zaradi simetrije $P(Z_n \leq 0) = P(Z_n \geq 0)$. Sledi $P(Z_n \geq 0) = 1/2$, če je n lih, in $P(Z_n \geq 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n}{n/2}$, če je n sod. (b). Brez vpliva na porazdelitve lahko na N^0 in N^1 gledamo kot dobljena iz markacije enega samega HPP K z intenzivnostjo λ , markacije n.e.-Ber(1/2)-p. Potem je iz Tonellijevega izreka $E \int_0^t \mathbb{1}_{\{N_s^1 \geq N_s^0\}} ds = \int_0^t P(N_s^1 \geq N_s^0) ds$, in naprej s pogojevanjem, $= \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} P(N_s^1 \geq N_s^0 | K_s = k) ds = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} P(Z_k \geq 0) ds$. Ko vstavimo rezultat prejšnje točke dobimo $\frac{t}{2} + \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda s} \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k+1}} ds$, od koder željeni rezultat.

Remark. Let U_t be the Lebesgue amount of time $N^1 \geq N^0$ on $[0, t]$. The above implies in particular that $EU_t/t \rightarrow 1/2$ as $t \rightarrow \infty$. This ensemble average limit has however no a.s. counterpart (cf. the arc sine law for the simple symmetric random walk). Indeed it follows from the above that U_t/t converges in distribution, as $t \rightarrow \infty$, to the arc-sine law (see R. K. Gettoor and M. J. Sharpe: On the Arc-Sine Laws for Lévy Processes; $N^1 - N^0$ is a Lévy process).