

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 2. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

21. avgust 2017

- (25 točk) Asistent dela napake, največ eno naenkrat, končno mnogo na vsakem končnem časovnem intervalu. Ob času $t = 0$ asistent še ni storil nobene napake. Za $i \in \mathbb{N}$ naj bo T_i čas, ki mine med $(i - 1)$ -vo ter i -to napako ($T_i = \infty$ na dogodku, da $(i - 1)$ -ve napake sploh ni bilo) če je $i \geq 2$ oz. med časom 0 in trenutkom, ko asistent stori prvo napako, če je $i = 1$. Privzemimo da so T_i , $i \in \mathbb{N}$, n.e.-Exp(λ)-p. za nek $\lambda \in (0, \infty)$. Študenti zaznajo posamezno storjeno napako neodvisno od prihodnih časov napak, vsakič neodvisno, z verjetnostjo $p \in (0, 1)$. Asistent, neodvisno od študentov in od prihodnih časov napak, tudi zazna posamezno storjeno napako vsakič neodvisno, z verjetnostjo $q \in (0, 1)$. Določi verjetnost, da bodo do časa $T \in (0, \infty)$ zaznane vse napake, pri čemer jih bo asistent zaznal natanko $k \in \mathbb{N}_0$ več kot jih bodo zaznali študenti, in pri čemer bo natanko $l \in \mathbb{N}_0$ takih od katerih bo vsaka zaznana tako s strani študentov kot s strani asistenta. **Pomoč.** Če sta $U \sim \text{Pois}(\mu_1)$ in $V \sim \text{Pois}(\mu_2)$ neodvisni slučajni spremenljivki, $\{\mu_1, \mu_2\} \subset (0, \infty)$, je za $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathbf{P}(U - V = k) = e^{-\mu_1 - \mu_2} (\mu_1 / \mu_2)^{k/2} I_k(2\sqrt{\mu_1 \mu_2})$, kjer je I_k modificirana Besselova funkcija prve vrste: $I_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2m+k}}{m!(m+k)!}$ ($z \in \mathbb{R}$).¹

Rešitev. Če z M označimo proces štetja napak asistenta, je M HPP z intenziteto λ . Gre za markiranje tega procesa z označbami A , S , V ter N , z verjetnostmi (v tem vrstnem redu) $p^A := q(1 - p)$, $p^S := p(1 - q)$, $p^V := pq$ ter $p^N := (1 - p)(1 - q)$: A pomeni, da napako zazna asistent, vendar je ne zaznajo študenti; S obratno; V , da jo zaznajo vsi, tako asistent kot študenti; N , da je ne zazna nihče, niti asistent, niti študenti. Za $o \in \{A, S, V, N\}$ naj bo M^o proces štetja števila napak markiranih z o . Potem nas zanima $\mathbf{P}(M_T^N = 0, M_T^A + M_T^V = M_T^S + M_T^V + k, M_T^V = l)$. Poenostavimo, in upoštevamo neodvisnost M_T^N , M_T^A , M_T^V ter M_T^S . Dobimo $\mathbf{P}(M_T^N = 0)\mathbf{P}(M_T^A - M_T^S = k)\mathbf{P}(M_T^V = l)$. Iz $M_T^o \sim \text{Pois}(\lambda p^o T)$ za $o \in \{A, S, V, N\}$, sledi da je željena verjetnost enaka

$$e^{-\lambda T(1-p)(1-q)} e^{-T\lambda(p+q-2pq)} \left(\frac{q(1-p)}{p(1-q)} \right)^{k/2} I_k(2\lambda T \sqrt{pq(1-p)(1-q)}) \frac{(\lambda T pq)^l}{l!} e^{-\lambda T pq},$$

kar se poenostavi v

$$e^{-\lambda T} \left(\frac{q(1-p)}{p(1-q)} \right)^{k/2} I_k(2\lambda T \sqrt{pq(1-p)(1-q)}) \frac{(\lambda T pq)^l}{l!}.$$

- (25 točk) Naj bo $n \in \mathbb{N}$, $\{\lambda_A, \lambda_B\} \subset (0, \infty)$. V kolesarski štafeti, ki sestoji iz n etap, tekmujeta Ekipa A in Ekipa B, vsaka z n člani. Članom ekipe A dajmo imena A_1, \dots, A_n ,

¹Skellamova porazdelitev.

članom ekipe B pa imena B_1, \dots, B_n . Za $i \in [n] := \{1, \dots, n\}$ odkolesari i -to etapo za ekipo A član A_i za kar porabi T_i^A časa, za ekipo B pa član B_i za kar porabi T_i^B časa. Čase predaj štafete zanemarimo; ekipi štartata obe hkrati ob času $t = 0$. Predpostavimo da so $(T_i^A)_{i \in [n]}$ n.e.-Exp(λ_A)-p., neodvisne od $(T_i^B)_{i \in [n]}$, ki so n.e.-Exp(λ_B)-p. Določi verjetnost, da zmaga ekipa A! (Če ekipi končata ob istem času, se šteje, da ni nobena zmagala.)

Rešitev. Čase T si lahko (morda na razširitvi verjetnostnega prostora) mislimo kot medprihodne čase dveh neodvisnih homogenih Poissonovih procesov. S standardnimi oznakami nas potem zanima $P(S_n^A < S_n^B)$. Ker je $\{S_n^A < S_n^B\} = \{N_{S_n^A}^B < n\}$, je torej iz neodvisnosti N^A ter N^B , znanih porazdelitev v HPP, in Tonellijevega izreka združene nega z izrekom o sliki mere, željena verjetnost enaka $\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\infty \frac{s^{n-1} \lambda_A^n}{(n-1)!} e^{-(\lambda_A + \lambda_B)s} \frac{\lambda_B^k s^k}{k!} ds = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} \frac{\lambda_A^n \lambda_B^k}{(\lambda_A + \lambda_B)^{n+k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \frac{\lambda_A^n \lambda_B^k}{(\lambda_A + \lambda_B)^{n+k}}$. To lahko seveda vidimo tudi iz markacij: če HPP($\lambda_A + \lambda_B$) markiramo z A oz. B z verjetnostma $\lambda_A/(\lambda_A + \lambda_B)$ oz. $\lambda_B/(\lambda_A + \lambda_B)$, potem je verjetnost da bo do n markacij z A prišlo (strogo) pred n markacijami z B enaka vsoti verjetnosti po $k = 0, \dots, n-1$, da bo v prvih $n+k$ markacijah bilo k -markacij z B in n markacij z A, od tega zadnja z A.

3. (25 točk) Poissonov proces ima funkcijo intenzitete ρ dano z

$$\rho(t) = \frac{3\sqrt{t}}{2(t_0)^{3/2}} \text{ za } t \in [0, \infty),$$

kjer je $t_0 \in (0, \infty)$ neka konstanta. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Določi gostoto n -tega prihodnega časa S_n (predpostavljajoč, da je z gotovostjo $S_n < \infty$).

Rešitev. Ker je $\{S_n \leq t\} = \Omega \setminus \{N_t \leq n-1\}$, je

$$P(S_n \leq t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t/t_0)^{3k/2}}{k!} e^{-(t/t_0)^{3/2}},$$

za $t \in [0, \infty)$ /v posebnem $P(S_n < \infty) = 1/$. Če to relacijo odvajamo dobimo teleskopsko vsoto; z nekaj algebre in iz Fundamentalnega izreka integralnega računa sledi, da je S_n absolutno zvezen z gostoto

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) \frac{(t/t_0)^{3(n-1)/2}}{(n-1)!} \frac{3}{2} \frac{1}{t_0} \sqrt{\frac{t}{t_0}} e^{-(t/t_0)^{3/2}}.$$

Alternativno, iz skupne gostote $(S_1, \dots, S_n) \sim \int_0^\infty \rho = \infty$ —, z marginalizacijo

$$\mathbb{1}_{(0, \infty)}(s_n) \int_0^{s_n} ds_{n-1} \cdots \int_0^{s_2} ds_1 \rho(s_1) \cdots \rho(s_n) e^{-\Theta(s_n)} =$$

(integracija po vakem od $(n-1)!$ območij, ki ustrezajo različnim urejenostim s_1, \dots, s_{n-1} da isto število ...)

$$= \mathbb{1}_{(0, \infty)}(s_n) \frac{1}{(n-1)!} \left(\int_0^{s_n} \cdots \int_0^{s_n} \rho(s_1) \cdots \rho(s_{n-1}) ds_1 \cdots ds_{n-1} \right) \rho(s_n) e^{-\Theta(s_n)}$$

$$= \mathbb{1}_{(0,\infty)}(s_n) \frac{1}{(n-1)!} \left(\int_0^{s_n} \rho(u) du \right)^{n-1} \rho(s_n) e^{-\Theta(s_n)} =$$

(alternativno sledi slednji izraz direktno z zaporedno integracijo, in iz Fundamentalnega izreka integralnega računa)

$$= \mathbb{1}_{(0,\infty)}(s_n) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(s_n) \frac{\Theta(s_n)^{n-1}}{(n-1)!} \rho(s_n) e^{-\Theta(s_n)},$$

kjer je $\Theta := \int_0^\cdot \rho$, kar da seveda isti rezultat (morda nekoliko hitreje). Slednji izraz je, mimogrede, splošen.

4. Naj bo $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e. – s porazdelitveno funkcijo F – p. slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $[0, \infty)$, pri čemer je F nearitmetična, in s končnim drugim momentom $\int x^2 dF(x) < \infty$. Definirajmo $S_n := \sum_{i=1}^n T_i$ za $n \in \mathbb{N}_0$ (seveda, $S_0 = 0$), ter $N_t := \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}(S_n \leq t)$ za $t \in [0, \infty)$ – pripadajoči prenovitveni proces. Definirajmo končno funkcijo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g(t) := \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \mathbf{E}(t - S_{N_t}) \text{ za } t \in \mathbb{R}.$$

- (a) (15 točk) Zapiši prenovitveno enačbo za funkcijo g .
 (b) (10 točk) Določi $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$. **Pomoč.** Za $t \in [0, \infty)$ velja $t(1 - F(t)) + \int_t^\infty (1 - F(s)) ds = \int_{(t,\infty)} s dF(s)$.

Rešitev. Gre za prenovitveno enačbo, ter asimptotiko, upanja starosti $A_t := t - S_{N_t}$, $t \in [0, \infty)$, procesa N .

(a). Za $t \in [0, \infty)$, je $g(t) = \mathbf{E}[t - S_{N_t}] = \mathbf{E}[t - S_{N_t}, T_1 \leq t] + \mathbf{E}[t - S_{N_t}, T_1 > t]$. Iz prenovitvene lastnosti je $N' = (N_{T_1+t} - 1)_{t \in [0,\infty)}$ neodvisen od $\sigma(T_1)$ in $\sim N$. Naj bodo količine s črtico od procesa N' . Ker je $A_t = A'_{t-T_1}$ na $\{T_1 \leq t\}$, sledi iz Tonellijevega izreka ter izreka o sliki mere, da je $\mathbf{E}[A_t, T_1 \leq t] = \mathbf{E}[A'_{t-T_1}, T_1 \leq t] = \int_{[0,t]} g(t-s) dF(s)$. Ker je $t - S_{N_t} = t$ na $\{T_1 > t\}$ je naprej za $t \in \mathbb{R}$, $h(t) := \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \mathbf{E}[t - S_{N_t}, T_1 > t] = t(1 - F(t)) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$. Sledi $g = h + g \star F$. Merljivost g je del Tonellijevega izreka.

(b). Enakost iz “pomoči” sledi iz Tonellija, če zapišemo $s = \int_0^s du$.

Vidimo torej, da je $h|_{[0,\infty)}$ razlika dveh nenegativnih nenaraščajočih integrabilnih (Tonelli; $\int_0^\infty \int_{(t,\infty)} s dF(s) dt = \int_{(0,\infty)} s^2 dF(s) < \infty$ in $\int_0^\infty \int_t^\infty (1 - F(s)) ds dt = \int_0^\infty s(1 - F(s)) ds = \int_{(0,\infty)} s^2 dF(s)/2 < \infty$) funkcij, in kot taka direktno Riemannovo integrabilna. Ali z ocenjevanjem: $0 \leq h(t) = \mathbf{E}[t; T_1 > t] \leq \mathbf{E}[T_1, T_1 > t]$ za $t \in [0, \infty)$; $[0, \infty) \ni t \mapsto \mathbf{E}[T_1, T_1 > t]$ je nenaraščajoča in integrabilna (njen integral je $\mathbf{E}[T_1^2]$, via Tonelli), zato je direktno Riemannovo integrabilna; posledično je tudi h (ki je zvezna skoraj povsod) direktno Riemannovo integrabilna. Funkcija g je lokalno omejena, saj je vendar $A_t \leq t$ za $t \in [0, \infty)$. F je neritmetična, v posebnem je $F(0) < 1$. Iz Smithovega izreka sledi, da je $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \int_0^\infty h(t) dt / \int_0^\infty s dF(s) = \int_{(0,\infty)} s^2 dF(s) / (2 \int_0^\infty s dF(s))$.