

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 3. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

4. september 2017

1. Naj bo $n \in \mathbb{N}$, $\{p_1, \dots, p_n\} \subset (0, 1]$, $p_1 + \dots + p_n = 1$, $T = (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e.-Exp(1)-p. slučajnih spremenljivk in $Z = (Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e.-po shemi $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ -p. slučajnih spremenljivk, neodvisno od T . Definirajmo $K := \inf\{k \in \mathbb{N} : \{Z_1, \dots, Z_k\} = \{1, \dots, n\}\}$, prvi (diskreten) čas, ko smo v zaporedju Z videli vse vrednosti iz $\{1, \dots, n\}$. Naj bo še $S := \sum_{i=1}^K T_i$.
 - (a) (6 točk) Dokaži, da je $E[S] = E[K]$.
 - (b) (6 točk) Dokaži, da je za $k \in \{1, \dots, n\}$, $E[\sum_{i=1}^K \mathbb{1}(Z_i = k)] = p_k E[K]$.
 - (c) (13 točk) Dokaži, da je $E[S] = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{J \in \binom{[n]}{k}} \frac{1}{\sum_{j \in J} p_j} = \sum_i \frac{1}{p_i} - \sum_{i < j} \frac{1}{p_i + p_j} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{p_1 + \dots + p_n}$. Tu je $\binom{[n]}{k}$ množica k -elementnih podmnožic $[n] := \{1, \dots, n\}$.

Rešitev. Prva dela sledita neposredno iz Waldove identitete ter $T_i \sim \text{Exp}(1)$ in $\mathbb{1}(Z_i = k) \sim \text{Ber}(p_k)$, $k \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$: K je čas ustavljanja naravne filtracije zaporedja Z , glede na katerega ima (Z, T) neodvisne stacionarne vrednosti). T si lahko mislimo kot zaporedje medprihodnih časov v $N \sim \text{HPP}(1)$, markiranem z Z . Iz markacije dobimo neodvisne $N^i \sim \text{HPP}(\lambda p_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Tedaj je $S = \vee_{i=1}^n T_1^i$, kjer je $T_1^i \sim \text{Exp}(p_i)$ prvi prihodni čas v procesu N^i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Za $x \in (0, \infty)$ je tedaj $P(S \leq x) = \prod_{i=1}^n P(T_1^i \leq x) = \prod_{i=1}^n (1 - e^{-x p_i})$. Sledi $ES = \int_0^\infty P(S > x) dx = \int_0^\infty (1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-x p_i})) dx = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{J \in \binom{[n]}{k}} \frac{1}{\sum_{j \in J} p_j} = \sum_i \frac{1}{p_i} - \sum_{i < j} \frac{1}{p_i + p_j} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{p_1 + \dots + p_n}$.

2. Naj bo $\lambda \in (0, \infty)$, $N \sim \text{HPP}(\lambda)$, $(S_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ prihodni časi procesa N ($S_0 = 0$). Za $t \in (0, \infty)$ definirajmo "največjo vrzel do časa t ":

$$L_t := \max_{k \in \mathbb{N}} (S_k \wedge t - S_{k-1} \wedge t).$$

Naj bodo $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ medprihodni časi procesa N . V točkah (a)-(b)-(c) bodi $\epsilon \in (0, 1)$.

- (a) (7 točk) Z uporabo Borel-Cantellijeve leme pokaži, da je $T_n \geq \frac{1-\epsilon}{\lambda} \log(n)$ za poljubno velike $n \in \mathbb{N}$, s.g.
- (b) (2 točk) Sklepaj, da je $\max_{1 \leq k \leq n} T_k \geq \frac{1-\epsilon}{\lambda} \log(n)$ za poljubno velike $n \in \mathbb{N}$, s.g.
- (c) (5 točk) Dokaži, da je, s.g., za vse dovolj velike $t \in [0, \infty)$, $N_t - 1 \geq (1 - \epsilon)t\lambda$.
- (d) (9 točk) Uporabi prejšnje točke, in dokaži da je s.g. $\limsup_{t \rightarrow \infty} L_t / \log(t\lambda) \geq \frac{1-\epsilon}{\lambda}$.

(e) (2 točk) Sklepaj da je s.g. $\limsup_{t \rightarrow \infty} L_t / \log(t\lambda) \geq \frac{1}{\lambda}$.

Rešitev. Prvi del sledi iz $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(T_n \geq \frac{1-\epsilon}{\lambda} \log(n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-(1-\epsilon)} = \infty$ in neodvisnosti medprihodnih časov, ter leme BC-II. Drugi del je trivialna posledica prvega, saj je vendar $\max_{1 \leq k \leq n} T_k \geq T_n$. Tretji del sledi iz $N_t/t \rightarrow \lambda$ s.g., kar je KZVŠ za prenovitveni proces N . Za četrti del opazimo da je s.g. za vse dovolj velike t -je $L_t \geq \max_{1 \leq k \leq \lceil (1-\epsilon)t\lambda \rceil} T_k$, in torej s.g. za poljubno velike t -je, $L_t \geq \frac{1-\epsilon}{\lambda} \log(\lceil (1-\epsilon)t\lambda \rceil) \geq \frac{1-\epsilon}{\lambda} \log((1-\epsilon)t\lambda)$. Ko delimo z $\log(t\lambda)$, in pošljemo $t \rightarrow \infty$, dobimo željeno relacijo. Zadnji del sledi, ko spustimo $\epsilon \downarrow 0$ čez neko zaporedje.

3. (25 točk) Naj bo $t_0 \in (0, \infty)$, $d \in [0, \infty)$. Poissonov proces ima funkcijo intenzitete ρ dano z

$$\rho(t) = e^{-t/t_0}/t_0 \text{ za } t \in [0, \infty).$$

Za $t \in [0, \infty)$ določi $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{N_t} e^{-dS_k}]$. Koliko je $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{N_\infty} e^{-dS_k}]$?

Rešitev. Za $t = 0$ je seveda $N_0 = 0$ in potem $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{N_t} e^{-dS_k}] = 0$. Sicer pogojimo, za $K \in \mathbb{N}_0$, na $N_t = K$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N_t} e^{-dS_k} | N_t = K \right] &= K \int_0^t \frac{e^{-s/t_0-ds}}{t_0(1-e^{-t/t_0})} ds \text{ (lastnost vrstilnih statistik)} \\ &= K \frac{1-e^{-t/t_0-dt}}{1-e^{-t/t_0}} \frac{1}{1+dt_0}. \end{aligned}$$

Iz $N_t \sim \text{Pois}(1-e^{-t/t_0})$ sledi

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N_t} e^{-dS_k} \right] &= \sum_{K=0}^{\infty} K \frac{1-e^{-t/t_0-dt}}{1-e^{-t/t_0}} \frac{1}{1+dt_0} \frac{(1-e^{-t/t_0})^K}{K!} e^{-(1-e^{-t/t_0})} \\ &= \frac{1-e^{-t/t_0-dt}}{1+dt_0}. \end{aligned}$$

Končno je iz monotone konvergence

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N_\infty} e^{-dS_k} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-e^{-t/t_0-dt}}{1+dt_0} = (1+dt_0)^{-1}.$$

4. Naj bo $t_0 \in (0, \infty)$. Življenjska doba neke moderne kapitalistične naprave je slučajna, zavzame vrednost iz $[t_0/2, t_0]$, in ima absolutno zvezno porazdelitev z gostoto dano z $f(t) = at^2 \mathbb{1}_{[t_0/2, t_0]}(t)$, kjer je a ustrezna normalizacijska konstanta /ki jo moraš šele določiti/. Ob času 0 kupimo prvo od teh naprav, nato pa vsako naslednjo, ko premine prejšnja. Življenjske dobe kupljenih naprav so med sabo neodvisne.

- (a) (15 točk) Določi dolgoročno povprečno (s.g. in v upanju) število kupljenih naprav na časovno enoto.
- (b) (10 točk) Kakšno je upanje časa, ki bo pretekel med časom prvega nakupa po tem, ko bo prvič kaka naprava delovala vsaj $3t_0/4$ dolgo, in časom naslednjega nakupa, ki bo sledil le-temu?

Rešitev. (a). Iz $\int_{t_0/2}^{t_0} at^2 dt = 1$, sledi $a = \frac{24}{7t_0^3}$. Naprej, če izvzamemo prvi nakup ob času $t = 0$ (ki seveda nima vpliva na iskani limiti), imamo opravka s prenovitvenim procesom; iz elementarnega prenovitvenega izreka oz. krepkega zakona velikih števil, sledi, da je povprečno število kupljenih naprav na časovno enoto, enako $1 / \int_{t_0/2}^{t_0} tat^2 dt = \frac{56}{45t_0}$. (b). Iz prenovitvene lastnosti sledi, da je iskano upanje enako upanju posameznega življenjskega časa, $\frac{45}{56}t_0$. Namreč, prenovitveno lastnost apliciramo na zaporedno številka nakupa, izključujoč nakup ob času 0, ki sledi prvemu trenutku, ko bo prvič kaka naprava delovala vsaj $3t_0/4$ dolgo, in ki je čas ustavljanja glede na naravno filtracijo zaporedja življenjskih dob kupljenih naprav.