

# SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 2. kolokvij

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

9. junij 2017

1. (25 točk) Naj bo  $t_0 \in (0, \infty)$ . Poissonov proces  $N$  ima funkcijo intenzitete  $\rho(t) = 1/\max\{t, t_0\}$ ,  $t \in [0, \infty)$ . Naj bosta (v standardnih oznakah)  $E_t := S_{N_t+1} - t$  in  $A_t := t - S_{N_t}$  presežek in starost procesa  $N$  ob času  $t \in [0, \infty)$ . Za  $t \in [t_0, \infty)$  določi  $\mathbb{E}[E_t]$  ter  $\mathbb{E}[A_t]$ . **Nasvet.** Upanja kot integrali presežnih funkcij.

**Rešitev.** Za  $u \in (0, \infty)$  je  $\mathbb{P}(E_t > u) = \mathbb{P}(N_{t+u} - N_t = 0) = t/(t+u)$ , in torej  $\mathbb{E}E_t = \int_0^\infty \frac{t}{t+u} du = +\infty$ . Podobno je za  $u \in (0, t - t_0)$ ,  $\mathbb{P}(A_t \geq u) = \mathbb{P}(N_t - N_{t-u} = 0) = (t-u)/t$  ter za  $u \in (t - t_0, t)$ ,  $\mathbb{P}(A_t \geq u) = \mathbb{P}(N_t - N_{t_0} = 0)\mathbb{P}(N_{t_0} - N_{t-u} = 0) = \frac{t_0}{t} e^{-(t_0-t+u)/t_0}$ . Sledi  $\mathbb{E}A_t = \int_0^t \mathbb{P}(A_t > u) du = \int_0^{t-t_0} \frac{t-u}{t} du + \int_{t-t_0}^t \frac{t_0}{t} e^{-(t_0-t+u)/t_0} du = t \left[ \frac{1-(t_0/t)^2}{2} + \left(\frac{t_0}{t}\right)^2(1 - e^{-1}) \right] = t \left[ \frac{1}{2} + \left(\frac{t_0}{t}\right)^2\left(\frac{1}{2} - e^{-1}\right) \right]$ .

2. <sup>1</sup>Bodi  $t_0 \in (0, \infty)$ . Naj bo  $N$  Poissonov proces s funkcijo intenzitete  $\rho$ ,  $\rho(t) = e^{-t/t_0}/t_0$  za  $t \in [0, \infty)$ .
- (a) (8 točk) Ali je  $\mathbb{P}(S_2 < \infty) = 1$ ? Ali je  $\mathbb{P}(S_2 < \infty) = 0$ ?
- (b) (17 točk) Izračunaj  $\mathbb{P}(T_1 > t_0, T_2 > t_0 | S_2 < \infty)$ .

**Rešitev.** Ker je  $\int_0^\infty \rho < \infty$ , je  $\mathbb{P}(S_1 < \infty) < 1$ . Ker je  $\int_0^\infty \rho > 0$ , je  $\mathbb{P}(S_1 < \infty) > 0$ . Označimo  $\Theta(t) := \int_0^t \rho(s) ds$  za  $t \in [0, \infty]$ , sledi  $\Theta(\infty) = 1$ . Iz pogojnih gostot za medprihodne čase imamo, da je

$$\mathbb{P}(T_1 > t_0, T_2 > t_0 | S_2 < \infty) = \int_{t_0}^\infty \int_{t_0}^\infty \frac{e^{-t_1/t_0} e^{-(t_1+t_2)/t_0} e^{-(1-e^{-(t_1+t_2)/t_0})}}{t_0^2(1-2e^{-1})} dt_2 dt_1 =$$
$$\int_{t_0}^\infty e^{-t_1/t_0} (e^{-(1-e^{-(t_1+t_0)/t_0})} - e^{-1}) / t_0 dt_1 / (1-2e^{-1}) = (e(e^{e^{-2}} - 1) - e^{-1}) / (e - 2) \doteq 3.6\%.$$

<sup>1</sup>**Spomnimo.** Naj bo  $N$  Poissonov proces s prihodnimi časi  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , in z zvezno funkcijo intenzitete  $\rho$ , ki ni identično enaka nič. Naj bo  $n \in \mathbb{N}$  in označimo  $\Delta_n := \{(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < s_1 < \dots < s_n\}$  ter  $\Theta(t) := \int_0^t \rho(s) ds$  za  $t \in [0, \infty]$ . Tedaj je, pogojno na  $\{S_n < \infty\}$ , vektor prihodnih časov  $(S_1, \dots, S_n)$  absolutno zvezen slučajen vektor z gostoto (v  $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ )

$$\mathbb{1}_{\Delta_n}(s_1, \dots, s_n) \frac{\rho(s_1) \cdots \rho(s_n) e^{-\Theta(s_n)}}{1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Theta(\infty)^k}{k!} e^{-\Theta(\infty)}},$$

kjer je potrebno imenovalac razumeti v limitnem smislu ko je  $\Theta(\infty) = \infty$  (torej je tedaj enak 1).

3. (25 točk) Naj bo  $t_0 \in (0, \infty)$ . Avtobusi prihajajo na postajo skladno s prenovitvenim procesom  $N$  prirejenim zaporedju  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  n.e.-Unif( $[t_0/2, t_0]$ )-p. slučajnih spremenljivk z vrednostmi v  $(t_0/2, t_0]$ . Na postajo pridemo nekje na intervalu  $[0, t_0]$  ob slučajnem času  $U \sim \text{Unif}([0, t_0])$ , in neodvisno od  $N$ . Določi matematično upanje časa čakanja na avtobus. (Če pridemo na postajo točno ob prihodu kakega avtobusa na postajo, le-tega ne ujamemo, in moramo počakati na naslednjega.)

**Rešitev.** Iščemo  $\mathbb{E}[S_{N_U+1} - U]$ . Ker je  $S_{N_U+1} = S_1 \mathbb{1}(U < T_1) + S_2 \mathbb{1}(U \geq T_1)$ , sledi da je iskano upanje enako  $-t_0/2 + \mathbb{E}[T_1 \mathbb{1}(U < T_1) + (T_1 + T_2) \mathbb{1}(U \geq T_1)]$ . Slednje upanje je enako  $\mathbb{E}T_1 + \mathbb{E}T_2 \mathbb{1}(U \geq T_1)$  in zaradi neodvisnosti, ter enake porazdeljenosti  $T$ -jev,  $\mathbb{E}T_1(1 + \mathbb{P}(U \geq T_1))$ , torej  $\frac{3}{4}t_0(1 + \frac{2}{t_0} \int_{t_0/2}^{t_0} dt_1 \int_{t_1}^{t_0} du/t_0) = \frac{3}{4}t_0(1 + \frac{2}{t_0} \int_{t_0/2}^{t_0} dt_1(1 - t_1/t_0)) = \frac{3}{4}t_0(1 + 2 \int_0^{1/2} udu) = 15t_0/16$ . Končni rezultat:  $7t_0/16$ .

4. (25 točk) Naj bo  $\lambda \in (0, \infty)$ ,  $N \sim \text{HPP}(\lambda)$ ,  $p \in (0, 1]$ ,  $\Gamma \sim \text{geom}_{\mathbb{N}}(p)$ ,  $N$  neodvisen od  $\Gamma$ . Predpostavimo, da je  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = \infty$  z gotovostjo (namesto samo s.g.). Proces štetja  $M$  šteje prihode procesa  $N$  od vključno  $\Gamma$ -tega prihoda dalje. Torej je  $M_t = \mathbb{1}_{[S_\Gamma, \infty)}(t) [1 + (N_t - N_{S_\Gamma})]$  za  $t \in [0, \infty)$ . Razloži zakaj je  $M$  prenovitveni proces z zaostankom. Določi porazdelitev prvega in vseh nadaljnjih medprihodnih časov procesa  $M$ . Izračunaj  $\mathbb{E}[M_t]$  za  $t \in [0, \infty)$ .

**Rešitev.** Ker je  $N$  HPP glede na filtracijo  $\mathcal{F}^N \vee \sigma(\Gamma)$  sledi iz krepke lastnosti Markova HPP, da je  $M$  prenovitveni proces z zaostankom (s skoki velikost ena), pri čemer je prvi medprihodni čas  $S_\Gamma \sim \text{Exp}(p\lambda)$ , saj je  $S_\Gamma$  neodvisna vsota  $\Gamma$  n.e.-Exp( $\lambda$ )-p. slučajnih spremenljivk. Vsi nadaljni medprihodni časi imajo Exp( $\lambda$ ) porazdelitev. (Predpostavka  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = \infty$  zagotavlja končnost medprihodnih časov. Namesto krepke lastnosti Markova za HPP se lahko skličemo neposredno na krepko lastnost Markova za zaporedja s stacionarnimi neodvisnimi vrednostmi (zaporedje medprihodnih časov  $N$ ja!).) Upanje  $\mathbb{E}[M_t]$  lahko izračunamo direktno (upoštevamo neodvisnost inkrementalnega procesa po  $S_\Gamma$  od  $S_\Gamma$ , ki sledi iz krepke lastnosti Markova HPP, kot tudi  $N_{S_\Gamma+t} - N_{S_\Gamma} \sim N_t$ ):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[S_\Gamma, \infty)}(t) [1 + (N_{S_\Gamma+(t-S_\Gamma)} - N_{S_\Gamma})]] \\ &= \int_0^t du \lambda p e^{-\lambda p u} (1 + \lambda(t-u)), \\ &= \int_0^t du \lambda p e^{-\lambda p(t-u)} (1 + \lambda u) \\ &= e^{-\lambda p t} (e^{\lambda p t} - 1 + \frac{1}{p} (\lambda p t e^{\lambda p t} - (e^{\lambda p t} - 1))) \end{aligned}$$

kjer sledi druga enakost iz Tonellijevega izreka in izreka o sliki mere. Lahko pa računamo preko prenovitvene mere in L-S transformacij. Naj bo  $A_t := \mathbb{E}M_t$  za  $t \in [0, \infty)$ . Najprej je, v standardnih oznakah,  $\hat{G}(u) = \frac{\lambda p}{u + \lambda p}$  ter  $\hat{F} = \frac{\lambda}{u + \lambda}$ ,  $u \geq 0$ . Sledi  $\hat{A} = \frac{\hat{G}}{1 - \hat{F}} = \frac{\lambda p(u + \lambda)}{u(u + p\lambda)} = \frac{\lambda}{u} - \frac{\lambda(1-p)}{u + \lambda p}$ ,  $u > 0$  (in tudi za  $u = 0$ , če interpretiramo  $1/0 = \infty$ ,  $\infty - a = \infty$  za  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ). Od tod iz injektivnosti in linearnosti L-S transformacije,  $\mathbb{E}M_t = \lambda t - \frac{1-p}{p} (1 - e^{-\lambda p t})$  za  $t \geq 0$ , kar je seveda isti rezultat.

Naj bo  $t_0 \in (0, \infty)$ . Smiselne odločitve vlade prihajajo skladno s Poissonovim procesom s funkcijo intenzitete  $\rho(t) = 1/\max\{t, t_0\}$ ,  $t \in [0, \infty)$ . Za  $t \in [t_0, \infty)$  določi matematično upanje časa do naslednje smiselne odločitve vlade strogo po času  $t$ , ter matematično upanje časa od zadnje smiselne odločitve vlade do in vključno s časom  $t$  (slednji čas naj bo enak  $t$  na dogodku, da vlada sploh ni imel nobene smiselne odločitve do in vključno s časom  $t$ ). **Nasvet.** Upanja kot integrali presežnih funkcij.

<sup>2</sup>Bodi  $t_0 \in (0, \infty)$ . Trenutki popolne sreče v življenju prihajajo skladno s Poissonovim procesom s funkcijo intenzitete  $\rho$ ,  $\rho(t) = e^{-t/t_0}/t_0$  za  $t \in [0, \infty)$ .

- (a) (8 točk) Ali smo skoraj gotovo popolnoma srečni vsaj dvakrat v življenju? Ali smo popolnoma srečni vsaj dvakrat v življenju z verjetnostjo nič?
- (b) (17 točk) Pogojno na dogodku, da smo popolnoma srečni vsaj dvakrat v življenju, izračunaj verjetnost dogodka, da bomo na prvi trenutek popolne sreče čakali strogo več kot čas  $t_0$  in da bomo po prvem trenutku popolne sreče spet čakali strogo več kot čas  $t_0$  na drugi trenutek popolne sreče.

Naj bo  $\lambda \in (0, \infty)$ ,  $p \in (0, 1]$ . Stranke prihajajo na banko skladno s prihodnimi časi homogenega Poissonovega procesa z intenzivnostjo  $\lambda$ . Ob prihodu vsake neodvisno vržemo kovanec. Verjetnost, da na kovancu pade grb, je vsakič  $p$ . Naj bo  $M$  proces štetja, ki šteje stranke od vključno tiste dalje, pri kateri prvič pade grb. Razloži zakaj je  $M$  prenovitveni proces z zaostankom, določi porazdelitev prvega in vseh nadaljnjih medprihodnih časov ter prenovitveno mero procesa  $M$ .

---

<sup>2</sup>**Spomnimo.** Naj bo  $N$  Poissonov proces s prihodnimi časi  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , in z zvezno funkcijo intenzitete  $\rho$ , ki ni identično enaka nič. Naj bo  $n \in \mathbb{N}$  in označimo  $\Delta_n := \{(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < s_1 < \dots < s_n\}$  ter  $\Theta(t) := \int_0^t \rho(s) ds$  za  $t \in [0, \infty]$ . Tedaj je, pogojno na  $\{S_n < \infty\}$ , vektor prihodnih časov  $(S_1, \dots, S_n)$  absolutno zvezen slučajen vektor z gostoto (v  $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ )

$$\mathbb{1}_{\Delta_n}(s_1, \dots, s_n) \frac{\rho(s_1) \cdots \rho(s_n) e^{-\Theta(s_n)}}{1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Theta(\infty)^k}{k!} e^{-\Theta(\infty)}},$$

kjer je potrebno imenovalc razumeti v limitnem smislu ko je  $\Theta(\infty) = \infty$  (torej je tedaj enak 1).