

Analiza 1

Naravna, racionalna in realna števila

(1) Reši neenačbi:

(a) $\sqrt{x^2 + 1} + 2x - 1 > 0$,

(b) $\frac{3-x}{x+1} > \sqrt{3-2x}$.

(2) Reši neenačbe:

(a) $|x+1| < x+3$,

(b) $|x^2 + 4x + 3| < 2$,

(c) $|1 - |x-1|| < 1$.

(3) Dokaži: če je $2^n + 1$ praštevilo, potem je n oblike 2^k , kjer je k naravno število ali 0.

(4) Naj bo n naravno število. Pokaži, da je število $\sqrt{n}$ bodisi naravno bodisi iracionalno.

(5) Pokaži, da obstajata iracionalni števili x in y , za kateri je število x^y racionalno.

(6) Pokaži, da število e ni racionalno.

(7) Naj bo q neničelno racionalno število, $x > 0$ in y pa iracionalni števili.

(a) Dokaži, da so števila $\sqrt{x}$, $q+x$ in qx iracionalna.

(b) Ali lahko kaj podobnega povemo o številih $x+y$, xy in $\sqrt{q}$?

(8) Pokaži, da med poljubnima različnima realnima številoma obstaja iracionalno število.

(9) Dokaži, da za vsa naravna števila n veljajo enakosti:

(a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

(b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(10) Dokaži, da za vsa naravna števila n veljata neenakosti:

(a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$,

(b) $n! \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n$.

(11) Dokaži Bernoullijevo neenakost: za vsako naravno število n in za vsako realno število $a > -1$ velja

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

- (12) (a) Pokaži, da 10 deli izraz $2^{2^n} - 6$ za vsako naravno število $n \geq 2$.
 (b) Pokaži, da je za vsako naravno število n izraz $13^{2^n} + 6$ deljiv s 7.
- (13) Dokaži, da n paroma nevzporednih premic v ravnini, od katerih se nobene tri ne sekajo v isti točki, razdeli ravnino na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ delov.
- (14) Dokaži binomsko formulo: za vsaki realni števili a in b in za vsako naravno število n velja

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

- (15) Dokaži, da za naravni števili m in n ter za $j \in \{0, 1, 2, \dots, m+n\}$ velja

$$\binom{n+m}{j} = \sum_{i=0}^j \binom{m}{i} \binom{n}{j-i}.$$

- (16) Za naslednje množice določi supremum, infimum, minimum in maksimum, če obstajajo.
- (a) $A = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
 (b) $B = \{x \in (0, 1) \mid x \text{ ima v decimalnem zapisu vsaj eno enko}\}$,
 (c) $C_c = \{\frac{1}{1+e^{cx}} \mid x \geq 0\}$, kjer je $c \in \mathbb{R}$.

- (17) Naj bosta A in B podmnožici v $\mathbb{R}$. Vsota in razlika množic sta definirani s predpisom

$$A \pm B = \{a \pm b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Dokaži spodnje enakosti. Kdaj so te formule smiselne?

- (a) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$,
 (b) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$,
 (c) $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$,
 (d) $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$.

- (18) Dana je množica

$$E = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \text{ za nek } n \in \mathbb{N}\}.$$

Pokaži, da množica E določa Dedekindov rez.

- (19) Definirajmo rez

$$\sqrt{2} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0 \text{ ali } q^2 < 2\}.$$

Pokaži, da velja $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^*$.

- (20) Z uporabo Dedekindovega aksioma pokaži, da za vsak realen $x > 0$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja natanko eno realno število $y = \sqrt[n]{x} > 0$, da velja $y^n = x$.