

Analiza 1

Kompleksna števila in množice

(1) Reši v obsegu kompleksnih števil dani enačbi in skiciraj množici njunih rešitev:

(a) $|z + 1| = |2z - 1|$,

(b) $z^2 + 2i\operatorname{Re} z = |z|$.

(2) Skiciraj naslednje podmnožice kompleksnih števil. Nalogo poskusi rešiti brez računanja.

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 + i| < 1\}$,

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = |z - i|\}$,

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| + |z - 3| = 4\}$.

(3) Naj bo z kompleksno število, $z \neq 1$ in $|z| = 1$. Dokaži, da je število $i\frac{z+1}{z-1}$ realno.

(4) Z uporabo de Moivreove formule izračunaj naslednji kompleksni števili:

(a) $z = (1 + i\sqrt{3})^{42}$,

(b) $z = \frac{1}{(1 + i)^8}$.

(5) Reši v obsegu kompleksnih števil enačbi:

(a) $z^6 = 1$,

(b) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

(6) Reši enačbo $z^n = \bar{z}$ za $n \geq 2$.

(7) Reši v obsegu kompleksnih števil enačbi:

(a) $z^3 + 3z^2 + z - 5 = 0$,

(b) $z^2 - (1 - 4i)z - 5 - 5i = 0$.

(8) Dokaži, da za vsa neničelna kompleksna števila z velja

$$\left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq \arg z.$$

Nalogo poskusi rešiti geometrijsko.

(9) Naj bosta $a \neq 0$ in b kompleksni števili. Dokaži, da ima enačba $z^2 - 2az + b = 0$ obe rešitvi na enotski krožnici natanko tedaj, kadar je $|a| \leq 1$, $|b| = 1$ in $e^{i\arg b} = e^{2i\arg a}$.

- (10) (a) Poišči oglišča kvadrata v $\mathbb{C}$, ki ima središče v točki $s = 1 + i$, eno izmed oglišč pa v točki $a = 4 + 3i$.
- (b) Vzemimo poljuben štirikotnik v $\mathbb{C}$ in nad vsako njegovo stranico narišimo kvadrat. Središča dobljenih kvadratov označimo z A , B , C in D . Dokaži, da je daljica AC pravokotna na daljico BD in da sta obe daljici enako dolgi.
- (11) Izpelji adicijska izreka za $\cos n\phi$ in $\sin n\phi$ za $n = 3$ in $n = 4$.
- (12) Za poljuben $\phi \in (0, 2\pi)$ in poljuben $n \in \mathbb{N}$ izračunaj vsoti:

$$\sum_{k=0}^n \cos k\phi = 1 + \cos \phi + \cos 2\phi + \dots + \cos n\phi,$$

$$\sum_{k=0}^n \sin k\phi = \sin \phi + \sin 2\phi + \dots + \sin n\phi.$$

- (13) Poišči bijekcije:

- (a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$,
- (a) $f : \mathbb{N} \rightarrow (7\mathbb{N}_0 + 2) \cup (7\mathbb{N}_0 + 4)$,
- (b) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

- (14) Poišči bijekcije:

- (a) $f : (0, 1) \rightarrow (a, b)$,
- (b) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,
- (c) $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

- (15) Poišči bijekcijo $f : [0, 1) \rightarrow (0, 1)$.

- (16) Dokaži, da imata množici $\mathbb{R}$ in $[0, 1] \cup \mathbb{N}$ isto moč.

- (17) Dokaži, da imata množici $[0, 1) \times [0, 1)$ in $[0, 1)$ isto moč.

- (18) Določi moč naslednjih množic:

- (a) $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mid x_j \in \{0, 1\} \text{ za vse } j \in \mathbb{N}\}$,
- (b) $B = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in A \mid x_j \leq x_{j+1} \text{ za vse } j \in \mathbb{N}\}$.

- (19) Naj bo A neskončna množica odprtih, paroma disjunktnih intervalov v $\mathbb{R}$. Pokaži, da je A števno neskončna.

- (20) Pokaži, da je množica vseh končnih podmnožic množice $\mathbb{N}$ števno neskončna.