

Geometrijsko zaporedje

Iz matematike:

- Členi zaporedja: $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$

$$a_1, a_1 k, a_2 k, \dots a_{n-1} k$$

rekurzivna zveza: $a_n = a_{n-1} k$

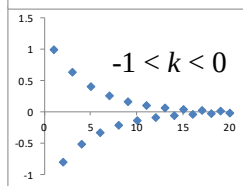
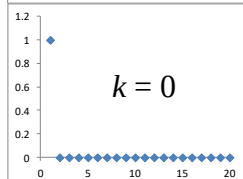
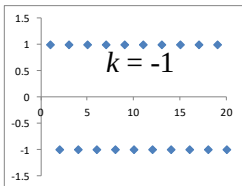
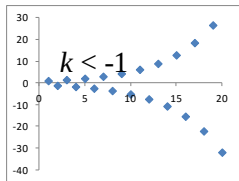
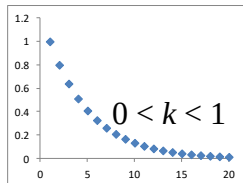
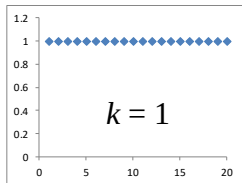
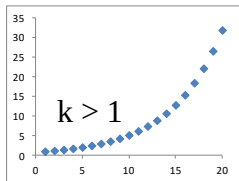
$$a_1, a_1 k, a_1 k^2, \dots a_1 k^{n-1}$$

n -ti člen $a_n = a_1 k^{n-1}$

- Vsota n členov zaporedja: $s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$$s = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

- Kakšni so členi zaporedja glede na k ?



Primer 1: zrna na šahovnici

- Koliko je zrn riža na šahovnici (8 x 8 polj), če na prvo polje položimo eno zrno, na vsako naslednje polje pa dvakrat več, kot na prejšnje?
- Geometrijsko zaporedje: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^{63} .

$$a_1 = 1, k = 2, n = 64$$

- Število zrn na 64 poljih:

$$s = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 \frac{2^{64} - 1}{2 - 1}$$

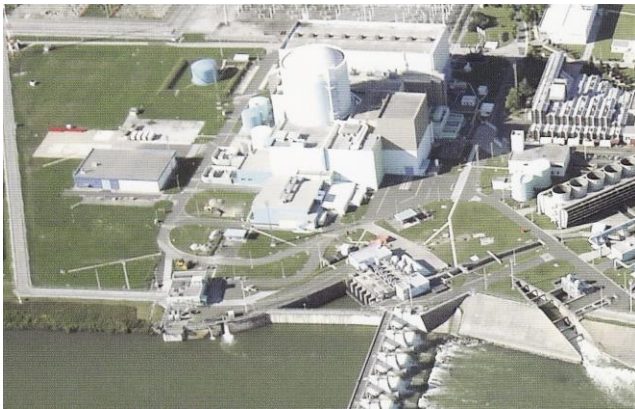
$$s = 18,446,747,073,709,551,615$$

(cca. 1000 letna svetovna proizvodnja)

Primer 2: razpolovitve/dupliranja (na vajah)

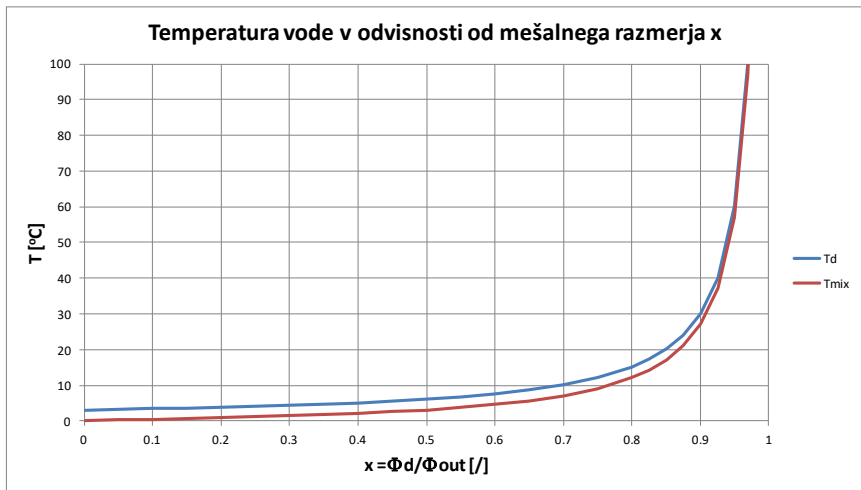
Primer 3: predgrevanje vode s povratno zanko

- Realen problem predgrevanja ledene savske vode v NEK



• Podatki: $T_s = 0,1^{\circ}\text{C}$, $\Delta T = 3^{\circ}\text{C}$, $\Phi_{\text{out}} = 2880 \text{ m}^3/\text{h}$

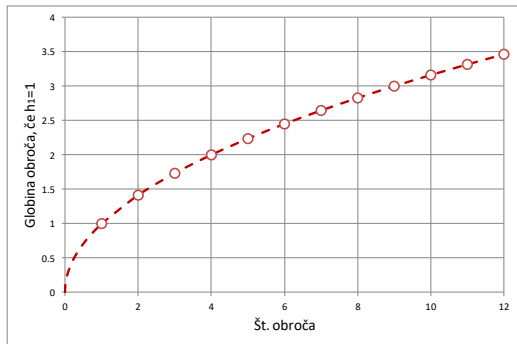
• Rešitev:



Primer 4: lastno dušeno nihanje (na vajah)

Primer 5: enakomerno obremenjeni obroči soda

- Realen problem določitve razporeda obročev avtocestnih silosov za sol
- Rešitev:



Primer 6: bančne obresti

- Glavnica a_0 , obrestna mera σ [%/leto], oz. $\tilde{\sigma} = \sigma/100$

Enostavni obrestni račun

Po 1. letu dobimo: $a_1 = a_0 + \tilde{\sigma}a_0$

po 2. letu: $a_2 = a_0 + 2\tilde{\sigma}a_0$

po n letih: $a_n = a_0 + n\tilde{\sigma}a_0$

Če je varčevalno obdobje krajše od enega leta:

$$a = a_0 + \tilde{\sigma}a_0 m/12, \quad m \dots \text{varčevalna doba v mesecih}$$

$$a = a_0 + \tilde{\sigma}a_0 d/365, \quad d \dots \text{varčevalna doba v dnevih}$$

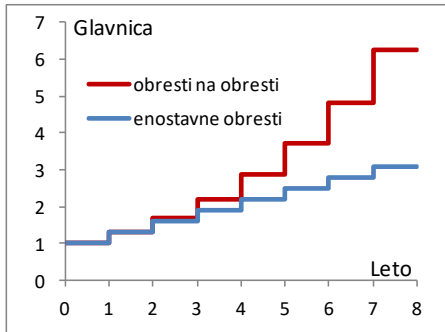
Obrestno obrestni račun

- Faktor obrestovanja: $r = 1 + \tilde{\sigma}$, $r > 1$

Po 1. letu dobimo: $a_1 = a_0 + \tilde{\sigma}a_0 = a_0(1 + \tilde{\sigma}) = a_0 r$

po 2. letu: $a_2 = a_1 + \tilde{\sigma}a_1 = a_1 r = a_0 r^2$

po n letih: $a_n = a_0 r^n$



Obdobja varčevanja, krajša od enega leta

- Kapitalizacijska doba: čas varčevanja do pripisa obresti k glavnici (leto, četrletje, mesec, dan).

A) Relativna (proporcionalna) obrestna mera

Obrestne mere: letna $\tilde{\sigma}$,

četrletna $\tilde{\sigma}_{1/4} = \tilde{\sigma}/4$

mesečna $\tilde{\sigma}_{\text{mes}} = \tilde{\sigma}/12$

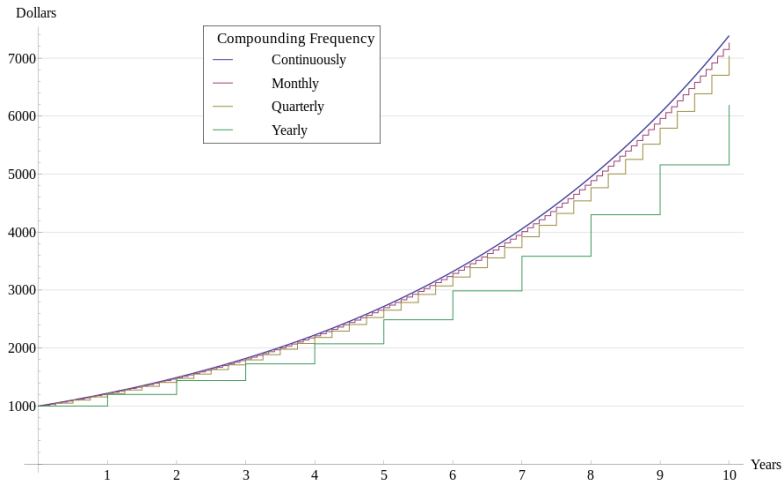
dnevna $\tilde{\sigma}_{\text{dan}} = \tilde{\sigma}/365$ ali $\tilde{\sigma}_{\text{dan}} = \tilde{\sigma}/366$

načela navadnega obrestnega računa

Npr., glavnica po m mesecih (kapitalizacijskih dobah):

$$a_n = a_0 r_{\text{mes}}^m, \quad r_{\text{mes}} = 1 + \tilde{\sigma}_{\text{mes}}$$

Vpliv velikosti kapitalizacijske dobe: $a_0 = 1000$ \$, $\sigma = 20\%$ [1]



B) Konformna obrestna mera

- Faktor obrestovanja r_m , (m – indeks, ki se nanaša na obdobje, krajše od enega leta) pri katerem je glavnica po 1 letu a_1 enaka, kot če bi varčevali v enoletni kapitalizacijski dobi.

$$a_1 = a_0 r_{letni}^1 = a_0 r_{krajši}^m$$

$$r_{letni} = r_{krajši}^m$$

$$r_{krajši} = \sqrt[m]{r_{letni}}$$

Varčevanje z mesečnim pologom in mesečnimi stroški

- Mesečni polog a_0 , mesečni faktor obresti r_{mes} , mesečni stroški c

1. mesec: a_0 (začetni polog)

konec 1.mes.: $a_1 = a_0 r_{mes} + a_0 - c$ (obrestovan polog na koncu 1. meseca + polog ob začetku 2. meseca – stroški 1. meseca)

konec 2. meseca:

$$a_2 = a_1 r_{mes} + a_0 - c = a_0 r_{mes}^2 + a_0 r_{mes} + c r_{mes} + a_0 - c$$

$$a_2 = a_0 (r_{mes}^2 + r_{mes} + 1) - c (r_{mes} + 1)$$

konec i -tega meseca: $a_i = a_0 (1 + r_{mes} + r_{mes}^2 + \dots + r_{mes}^i) - c (1 + r_{mes} + r_{mes}^2 + \dots + r_{mes}^{i-1})$

$$a_i = s = a_0 \frac{r_{mes}^{i+1} - 1}{r_{mes} - 1} - c \frac{r_{mes}^i - 1}{r_{mes} - 1}$$

ob zaključku varčevanja po m mesecih ni vplačila a_0 :

$$a_m = a_0(0 + r_{mes} + r_{mes}^2 + \dots + r_{mes}^m) - c(1 + r_{mes} + \dots + r_{mes}^{m-1})$$

$$a_m = a_0 r_{mes} (1 + r_{mes} + \dots + r_{mes}^{m-1}) - c(1 + r_{mes} + \dots + r_{mes}^{m-1})$$

$$a_m = s = (a_0 r_{mes} - c) \frac{r_{mes}^m - 1}{r_{mes} - 1}$$

Kredit

- Posojilo a_0 , letni faktor obresti r_{letni} , posojilo vračamo n let

Če posojilo poplačamo na koncu, bo znesek: $a_n = a_0 r_{letni}^n$

- Če dolg vračamo v enakih mesečnih obrokih b (anuitetah)

Stanje glavnice po mesecih:

0-ti mesec: a_0 (posojilo)

po 1. mesecu: $a_1 = a_0 r_{mes} - b$ (obrestovano posojilo - anuiteta)

po 2. mesecu: $a_2 = a_1 r_{mes} - b = a_0 r_{mes}^2 - b r_{mes} - b$

$$a_2 = a_0 r_{mes}^2 - b(r_{mes} + 1)$$

po m -tem mesecu je glavnica z obrestmi vred izplačana:

$$a_m = 0 = a_0 r_{mes}^m - b(r_{mes}^{m-1} + r_{mes}^{m-2} + \dots + r_{mes} + 1)$$

Upoštevajoč vsoto geometrijske vrste: $s = b \frac{r_{mes}^m - 1}{r_{mes} - 1}$ dobimo:

$$a_0 r_{mes}^m = b \frac{r_{mes}^m - 1}{r_{mes} - 1}$$

in anuiteto:

$$b = a_0 \frac{r_{mes}^m (r_{mes} - 1)}{r_{mes}^m - 1}$$

pri tem je:

$$r_{mes} = \sqrt[12]{r_{letni}}$$

Primer 7: piramidne sheme in mrežni marketing

- Ponzijeve sheme: vlagatelji kontaktirajo z vrhom sheme
- piramidne sheme: vlagatelji kontaktirajo s predhodnikom v shemi in agitirajo za nove člane
- mrežni marketing (multi-level marketing): podobno kot piramidne sheme, le da se prodaja še nek izdelek.
- Število udeležencev v shemah raste po geometrijskem zaporedju: $a_n = a_{n-1} k$, le da ni zagotovljena konstantnost k -ja.

Literatura

[1]

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Compound_Interest_with_Varying_Frequencies.svg#filelinks (dostopno septembra 2021)